XIX COBREAP | Foz do Iguaçu
INOVAÇÕES CIENTÍFICAS E TECNOLÓGICAS
CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA DE AVALIAÇÕES E PERÍCIAS
21 a 25 agosto de 2017
Hotel Mabu Thermas Grand Resort
Foz do Iguaçu / PR / Brasil

MODELOS E TÉCNICAS DE TOMADA DE DECISÃO EM ANÁLISE MULTICRITÉRIO - APLICAÇÕES EM AVALIAÇÃO DE IMÓVEIS.

PAULO FÁBIO BREGALDA DO CARMO

MODELOS E TÉCNICAS DE TOMADA DE DECISÃO EM ANÁLISE MULTICRITÉRIO – APLICAÇÕES EM AVALIAÇÃO DE IMÓVEIS.

RESUMO

O presente trabalho insere-se numa proposta para a quebra de paradigmas na avaliação de imóveis, na qual se projeta realizar uma apresentação dos principais modelos e técnicas de tomada de decisão multicritério com aplicações à avaliação de imóveis.

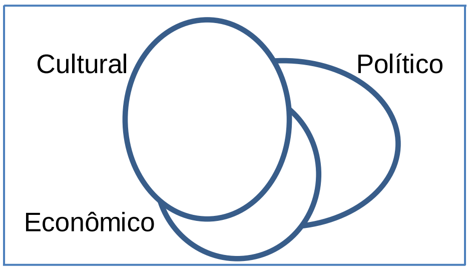
PALAVRAS-CHAVE: Análise multicritério, Decisão multicritério, Avaliação.

Capítulo 1 - PRESSUPOSTOS BÁSICOS

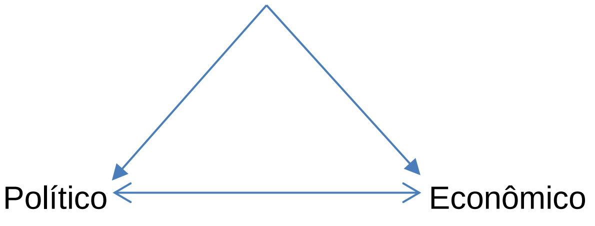
Nesta proposta prevemos iterações com alguns atores, especialistas em suas modalidades que atuam no processo de planejamento, decisão e execução, nos diversos campos do conhecimento, que devem ser os interlocutores em qualquer aplicação de análise multicritério.

Na construção de um modelo heterodoxo apropriado à Avaliação de Imóveis, estão previstas entrevistas com um núcleo de colaboradores, em grau executivo de nivel elevado, dotado das habilidades e competências que capacite, com eficiência e eficácia, a induzir o alcance de máxima qualificação de toda a Equipe de Colaboradores dos diversos campos de influência: Cultural, Político e Econômico, que poder-se-ia dizer “social”. Com tais condições e intenções, espera-se com apoio de técnicas matemáticas de apoio à decisão multicritério, construir um algoritmo orientador que sirva de balizamento para a Avaliação de imóveis e bens, em geral.

$\cup$ = SOCIAL



ESQUEMA REPRESENTATIVO DA PREVALÊNCIA E DA DETERMINAÇÃO DO CULTURAL SOBRE O POLÍTICO E SOBRE O ECONÔMICO.



É incontestável que somente se pode controlar o desempenho e analisar quantitativamente o que se possa medir. Este é o princípio que orienta a elaboração de uma sistemática do tipo aqui proposta, na qual se construirá o conjunto articulado dos indicadores de desempenho que irá propiciar a tomada de decisão.

Acreditamos que os vetores determinativos são do Cultural para o Econômico e do Cultural para o Político. De tempos em tempos, há um revezamento quanto a prevalência entre o Político e o Cultural. Ou seja, acreditamos que a prevalência deve ser do Cultural determinando o Político e o Econômico.

Para o alcance de tal objetivo, e após a exposição e demonstração dos principais Métodos e Técnicas existentes de Tomada de Decisão Multicritério, com os seus pontos de destaque, prós e contras, de vários algoritmos envolvendo diversas técnicas para a tomada de decisão, mostraremos a forma que acreditamos ser a mais adequada para realizar as medições, envolvendo os diversos segmentos da sociedade. Vale dizer, temos que contemplar todos os aspectos inerentes ao problema, tais como custos, vontade política, anseios da população etc.

Como um exemplo amplo desta aplicação, podemos discutir criticamente o "Viaduto do Joá" e/ou a "Hidrelétrica de Belo Monte", de forma que haja a participação dos principais atores envolvidos no processo, com o objetivo primordial de realizar uma obra que melhor atenda o povo, em última instância o principal beneficiado com o processo. Bem como, podemos inserir essas sugestões para avaliação de bens.

Por exemplo, no caso da "Hidrelétrica de Belo Monte", não construir um reservatório de água, "preservando o meio ambiente" como querem os ecologistas, gerando energia elétrica com "águas rasas", garantindo a geração somente em uma época do ano (das chuvas fortes) ou inundar uma área e gerar a energia elétrica com reservatório de água, de forma ortodoxa, aumentando a geração de energia elétrica do país em 10%, suficiente para a Região Norte do país e, ainda, transmitir energia para a Região Sudeste, caso haja necessidade. Acreditamos que temos que discutir essas questões primordiais envolvendo todos os segmentos da sociedade.

Dado que o modelo indicou que a obra do "Viaduto do Joá" deve ser realizada, qual é a melhor alternativa? Apenas reformar o viaduto existente e para tal ter que paralisar o tráfego no local durante a obra de recuperação? Construir um outro viaduto paralelo ao primeiro? Reformar o viaduto existente? Após as obras, reformar o viaduto original mantendo as duas vias? Demolir o viaduto original? Enfim, o modelo deve indicar as melhores soluções para o "Viaduto do Joá", priorizando-as hierarquicamente, de forma que melhor atenda à sociedade, para tal deve-se envolver todos os segmentos.

Após discutido e analisado metodologicamente, dado que a decisão foi realizar a obra, por que é de interesse coletivo, vale dizer Social, decidir pelas melhores soluções, hierarquicamente e com seus respectivos pesos, que atenda aos vários objetivos e aos segmentos da sociedade, considerando os atores e cenários inerentes ao problema, "otimizando" as diversas funções objetivo. A solução deve atender de forma otimizada os aspectos culturais, políticos e econômicos, aos quais são englobados, sinteticamente, no que chamamos de “Social”, com o Cultural determinando o Político e o Econômico. Como o processo envolve os diversos segmentos e atores da sociedade ele será verdadeiramente democrático.

A análise multicritério estuda formas de auxiliar o homem, neste contexto denominado decisor, a tomar decisões na presença de incertezas e conflitos de interesses. Normalmente, um único ponto de vista é insuficiente para incluir toda a informação necessária e todas as contradições inerentes ao problema. Daí a importância de análise de decisão considerar vários critérios.

Problemas de otimização com múltiplos objetivos conflitantes possuem um conjunto de soluções “não-dominadas”. Como em aplicações reais apenas uma solução é executada, surge um problema de decisão: escolher entre as várias soluções eficientes, para várias funções objetivo, aquela que for mais satisfatória, hierarquizando as possíveis soluções de forma normalizada, considerando-se vários critérios. Essa escolha deve refletir as preferências dos diversos decisores, dos vários segmentos da sociedade, que devem conhecer profundamente o problema em questão.

Assim, para que haja a maior coerência possível entre a solução final selecionada e os interesses dos decisores, faz-se necessário o uso de técnicas de decisão multicritério. Neste contexto, a proposta é apresentar um estudo da análise multicritério e de seu emprego na escolha da solução final de problemas de otimização multiobjetivo, por meio do acoplamento entre métodos de decisão multicritério e algoritmos de otimização.

Capítulo 2 - INTRODUÇÃO

O Problema Clássico de Pesquisa Operacional, Problema de Otimização com uma única função objetivo, tem a seguinte forma geral:

Max $f(x) = c.x$

Sujeito a:

$A.x^T = B$

$x \geq 0$

Onde: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$; $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n$;

B = Matrix (n x 1) ; $A = A_{ij} \in R$ - Matriz (n x n) - $i,j \in \{1, 2, \dots, n\}$

OBSERVAÇAÕ: Max $f(x) = -$ Min $[-f(x)]$

Otimizar significa, por exemplo, obter o máximo de lucro ou o mínimo de custo, respeitando um conjunto de restrições (limitações). Ao otimizar a produção de uma empresa, deseja-se minimizar os custos com a mão de obra, com a matéria prima utilizada na produção dos produtos, com o espaço físico etc. No entanto, reduzir os gastos com o uso de materiais ultrapassados, de qualidade inferior provocam queda da confiabilidade e da durabilidade dos produtos. Ou seja, quando desejamos maximizar o lucro da empresa, não nos preocupamos, por exemplo, com a qualidade do produto final.

Inicialmente, esse tipo de problema mono-objetivo era tratado de forma simplista, agregando-se todos os objetivos em uma única função. Este problema mono-objetivo mostra-se inadequado ou insatisfatório, para a realidade que nos cerca.

Analogamente, os modelos de Produtividade não levam em consideração a qualidade, mas tão somente a quantidade produzida, o ganho de produtividade ou o ganho devido ao aumento de fatores, muitas vezes confundido com o ganho de produtividade, é a ele incorporado.

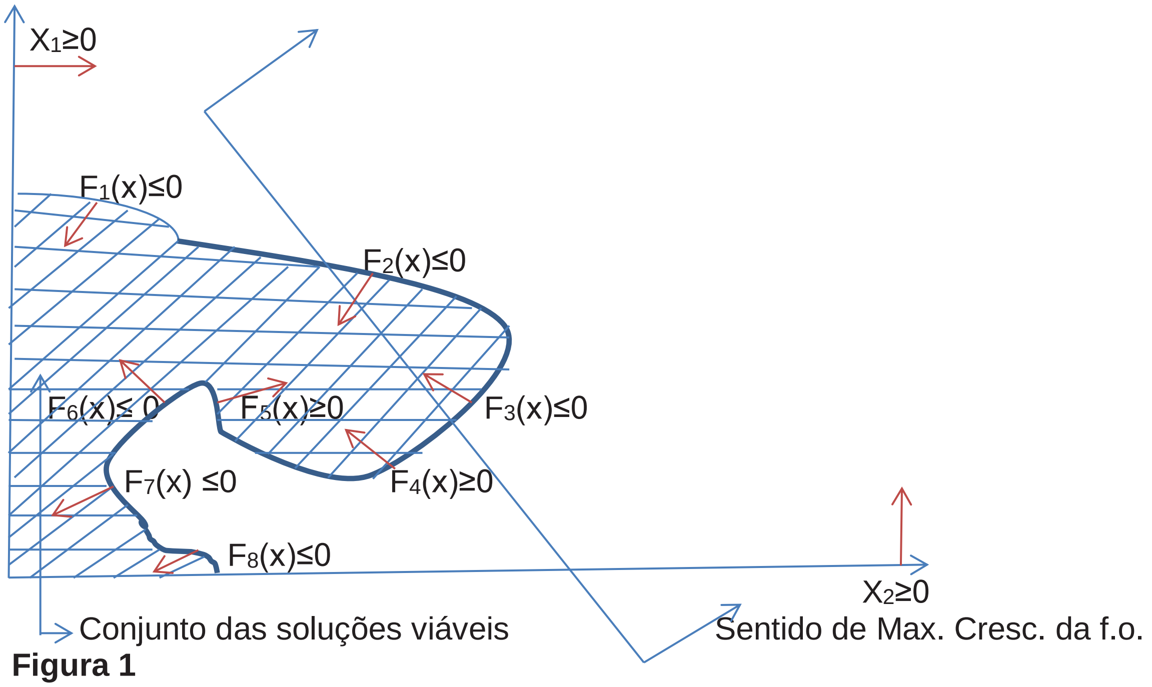


Figura 1

Restrições (limitações):
$F_1(x) \leq 0$; $F_2(x) \leq 0$; $F_3(x) \leq 0$; $F_6(x) \leq 0$; $F_8(x) \leq 0$
$F_4(x) \geq 0$; $F_5(x) \geq 0$; $F_7(x) \geq 0$
$\cap\, Fi(x) \leq 0 \;\cap\; x_i \geq 0 \rightarrow$ Conjunto das soluções viáveis.

Para contornar e resolver esses problemas não mono-objetivo construiu-se algumas técnicas e modelos mais sofisticados, tais como, Pareto-ótimo, desenvolvido para tratar dos problemas multiobjetivos, com várias soluções viáveis possíveis. Conhecendo esse conjunto de possíveis soluções Pareto-ótimas, resta ainda decidir qual delas será executada, a melhor.

Apresentaremos, entre outras técnicas e métodos, o conceito de ótimo desenvolvido por Vilfredo Pareto e outros, como fronteira não dominada e relações de dominância. Estes conceitos são empregados pelos algoritmos de busca mais recentes para procurar, na região viável, o conjunto de pontos que otimizam cada um dos objetivos em detrimento dos demais.

Entre os vários métodos existentes daremos especial destaque, com aplicações reais em tomadas de decisão, ao Método conhecido na literatura como **Análise Hierárquica – Analytic Hierarchy Process (AHP) – Thomas Saaty.**

No último capítulo faremos uma aplicação de Avaliação de imóveis completa, utilizando este modelo.

Os métodos de decisão associam números às alternativas, considerando-se cada critério. Esses números frequentemente têm significado específico. Mas, segundo Thomas Saaty, a ponderação de valores ordinais não faz sentido, pois diferentes números que preservem a mesma ordem podem gerar resultados diferentes. Por outro lado, para que esses números representem grandezas cardinais, é necessário que as medições sejam realizadas com o uso de escalas.

Segundo Saaty, a análise multicritério deveria ser uma ciência de medição baseada em matemática, psicologia e filosofia. Inspirado por essas ideias, ele desenvolveu em 1977 o método de tomada de decisão ao **Processo de Análise Hierárquica — ou Analytic Hierarchy Process (AHP)** - que se baseia em comparações entre cada alternativa e cada uma das demais, utilizando uma escala de medidas capaz de refletir o grau da preferência dos decisores por uma das duas alternativas. Em um primeiro momento são realizadas as comparações segundo cada critério. Depois, esses resultados são agregados a fim de se obter uma única ordenação das alternativas. O ferramental utilizado são vetores e matrizes especiais, cálculo de inversa das matrizes, autovalores e autovetores, entre outros.

Existem duas grandes Escolas básicas a Americana e a Francesa. Alguns autores consideram o Método AHP como um método da Escola Americana, sob a justificativa de que pode ser aproximado por uma Função Utilidade ou, ainda, que auxilia a construção da Função Utilidade – aprimorado pelo Método MAUT - Multiatribute Utility Theory. Outros consideram-no uma abordagem independente da Escola Americana ou da Escola Francesa, devido as suas características muito particulares. O fato é que o AHP hoje é um método extremamente conhecido e tem sido amplamente estudado, como se pode observar pelo grande número de publicações, principalmente, nos jornais Management Science e European Journal of Operational Research, além das publicações no Brasil nas principais revistas técnicas.

O objetivo é apresentar e resolver casos reais utilizando o AHP acoplado com outros métodos, tais como o Prométhée Multiplicativo, que na verdade representa uma nova versão para o método de decisão multicritério, Prométhée II e o Método de Torneios Multicritério. Faremos demonstrações com a crítica consistente e metodológica aos diversos métodos de análise de decisão multicritério e multiobjectivos e o acoplamento de vários métodos com o AHP na aplicação e formulação de algoritmo para auxiliar o processo decisório, atendendo aos anseios dos vários segmentos, atores e cenários da sociedade. As variáveis e atores devem ser escolhidos por processos matemáticos, tais como, Análise Fatorial, Análise Multivariada e Análise de Discriminante. Ao final do processo teremos um algoritmo, com o respectivo programa computacional, para a tomada de decisão de casos reais, com destaque para Avaliação de Imóveis e Bens, em geral.

Mostraremos, de forma resumida, os diversos métodos e técnicas analíticas do processo decisório conhecidas na literatura, seus pontos críticos positivos e negativos:

- PARETO ÓTIMO - Otimização Multiobjetivo;
- LÓGICA FUZZY E ANÁLISE MULTICRITÉRIO;
- MAUT – Multiatribute Utility Theory;
- TODIM - Tomada de Decisão Interativa Multicritério;
- ELECTRE – Elimination and Choice Translating Reality for Enrichment Evaluation;
- PROMÉTHEE – Preference Ranking Method for Enrichment Evaluation;
- TOPSIS – Techinique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution;

- MACBETH – Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Techinique;
- SAW – Simple Additive Weighting;
- AHP – Analytic Hierarquy Process.

A ênfase principal será dada à necessidade de desenvolver um sistema de análise de decisões multicritérios que tenham uma sólida base teórica, aliada a uma capacidade pragmática de aplicações em problemas reais de Engenharia, em particular, à Avaliação de Imóveis e Bens, em geral. Será dado destaque à decisão coletiva, contemplando os atores representativos da sociedade, experts nas suas especialidades, nos principais Métodos e Técnicas existentes de tomada de decisão multicritério.

Capítulo 3

3.1 - Conceito Pareto-ótimo

Em problemas multiobjetivos não há um ponto ótimo global que atenda ao mesmo tempo a todos os objetivos, como ocorre na otimização mono-objetivo.

Para a consecução dos problemas multiobjetivos aplica-se conceitos de relação dominância e de Pareto-ótimo aos pontos que atendem, simultaneamente, as restrições.

Assumindo-se ainda o mesmo problema de minimização, esses conceitos são apresentados a seguir.

Num problema de minimização, dois vetores y_A e $y_B \in R^m$, temos:
$y_A \prec y_B$ (lê-se: y_A domina y_B) se, em pelo menos uma dimensão j, y_A for estritamente menor do que y_B e nas demais dimensões $i \neq j$, y_A for menor ou igual a y_B. Diz-se, nesse caso, que o vetor y_B *é* dominado ou inferior, enquanto y_A *é* dominante ou superior. Aplicando-se essa definição para o problema multi-objetivo em estudo, dados dois pontos factíveis (viáveis) x_A e x_B, sendo $y_A = (f_1(x_A), f_2(x_A), . . . , f_m(x_A))$ e $y_B = (f_1(x_B), f_2(x_B),..., f_m(x_B))$, temos que:
$y_A \prec y_B \leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, . . .,m\}, fi(x_A) \leq fi(x_B) \wedge \exists j \in \{1, 2, . . .,m\}, f_j(x_A) < f_j(x_B)$.
Por outro lado, se y_A não for superior nem inferior a y_B, tem-se que $y_A \sim y_B$
(lê-se: y_A *é* indiferente a y_B).

3.2 - Solução Pareto-ótima

Com a relação de dominância é possível introduzir a condição de otimalidade para problemas multiobjetivos. Definindo-se a região viável Ω para o POM em estudo, cada possível solução $x_A \in \Omega$ é considerada Pareto-ótima se não há nenhum outro ponto $x_B \in \Omega$ tal que, $y_B = (f_1(x_B), f_2(x_B), ... , f_m(x_B))$ domine $y_A = (f_1(x_A), f_2(x_A), . . . , f_m(x_A))$. As soluções Pareto-ótimas são também chamadas não inferiores, eficientes ou não dominadas. A definição de ponto Pareto-ótimo pode ser estendida para uma região.
Uma solução $x_A \in \Omega$ é considerada localmente Pareto-ótima numa dada vizinhança $N(x_A, \delta)$ se existe $\delta > 0$, tal que x_A é Pareto-ótima em $N(x_A, \delta) \cap \Omega$.

3.3 - Fronteira Pareto-ótima

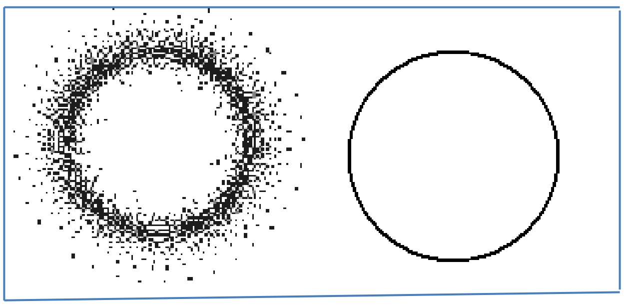
O critério de otimalidade para o problema multi-objetivo não define uma única solução global, mas um conjunto de soluções eficientes, descrito pela expressão:
$P* := \{x_A \in \Omega \mid \exists x_B \in \Omega : F(x_B) \prec F(x_A)\}$.
A esse conjunto de pontos Pareto-ótimos corresponde um conjunto de vetores de avaliações das funções objetivo que constitui, no espaço dos objetivos uma fronteira Pareto-ótima $FP*$ (ou, simplesmente, fronteira Pareto), definida como:
$FP* := \{F(x) \mid \forall x \in P*\}$.
É interessante notar que a fronteira Pareto pode delimitar uma porção convexa ou não convexa da região viável.
DEFINIÇÃO:
Um conjunto A é convexo $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in A$, $[(\alpha . x_1 + (1-\alpha). x_2] \in A$ **$(0\leq \alpha \leq 1)$.**

Capítulo 4
4.1 – A LÓGICA FUZZY E ANÁLISE MULTICRITÉRIO

Os conjuntos (ou classes) F*uzzy são definidos* como representações sem fronteiras (transições) abruptas, isto é, a transição entre pertence (ϵ - pertence) e não pertence num conjunto é gradual. Um conjunto F*uzzy* é caracterizado por uma possibilidade que varia no intervalo [0 1], indicando um incremento contínuo variando de “não pertence” à “pertence”, similarmente ao que ocorre com a definição de probabilidade. Esses conjuntos são uma forma de caracterização de classes temáticas, que por várias razões não têm ou não podem definir limites rígidos (contatos) entre si.
Assim, como no Modelo Booleano, o Modelo *Fuzzy* possui operadores para a síntese da informação. Caso a abordagem fosse booleana, seria feita a utilização de operadores lógicos como OR (união) e AND (interseção).

No Modelo *Fuzzy*, ela se dá através da combinação segundo análises multicritérios, definidas através de uma sequência lógica realizada pelos operadores *fuzzy*, a saber: mínimo, máximo, média, ponderado (com o uso do Processo Analítico Hierárquico) e gama.

A partir de estudos comparando os Modelos Booleanos e *Fuzzy*, Burrough e Mcdonnell (1998) consideram que o primeiro está muito mais sujeito à propagação de erros, sendo que o segundo tem como característica a indefinição de fronteiras ou limiares entre as classes, conforme a representação da Figura 1.



U Figura 2

Representação das fronteiras de um conjunto *Fuzzy* e Booleano.
Fonte: Burrough e McDonnell (1998).

BURROUGH, P. A.; MCDONNELL, R. A. **Principles of geographical information systems**. New York: Oxford University Press, 1998.

Para a utilização da Lógica Fuzzy, não podemos perder de vista que este é um modelo representativo da realidade aproximada, que imita as ocorrências do mundo real. Desta forma podemos fazer simulações, análise de sensibilidade e tirar outras informações para a tomada de decisões. O que se quer é se aproximar, assintoticamente, da realidade, sem perder de vista que essa é inatingível, principalmente, quando se trata de variáveis subjetivas, onde cada decisor decide de acordo com as suas convicções que é toda própria, vale dizer, cada um tem a sua própria verdade e que, obviamente, jamais poderá ser tomada de forma absoluta. Como modelo de análise, é necessária a escolha de metodologia adequada para cada situação.

Cox (1994) e Fang (1997) afirmam que é muito significante nas modelagens baseadas em Lógica Fuzzy a habilidade de codificação de conhecimentos inexatos e subjetivos, numa forma que se aproxima muito aos processos de decisão. Os sistemas de inferências baseados em Lógica Fuzzy possibilitam, a aproximação do conhecimento próximo ao “modelo cognitivo” utilizado na análise de problemas. Isto significa que o processo de aquisição do conhecimento é mais fácil, mais confiável e menos sujeito a erros não identificados.

Na análise multicritério, há duas abordagens para classificação de variáveis e como integrá-las. Na primeira abordagem usada para classificação multicritério, as classes temáticas e pesos são definidos com base na experiência de pesquisadores, questionários de avaliação ou entrevistas, formas estas que ainda possuem forte carga de subjetividade. Esta opção, envolvendo variáveis subjetivas, com aplicação da Lógica Fuzzy, é uma forma consciente de fugir da Lógica Booleana, vale dizer do rigor da Lógica Clássica ou formal – Aristotélica - onde não há sentido lógico a variável assumir valores diferentes de 0 ou de 1 – 3º princípio da Lógica Clássica ou do “terceiro excluído”, existe A e existe não A e não há uma terceira possibilidade.

A segunda abordagem, talvez podemos dizer mais formal, é baseada na definição de classes temáticas não pautadas somente na experiência ou em dados empíricos, mas com auxílio de operadores matemáticos, que possibilitam que as variáveis por si só se classifiquem em função de suas próprias características, com ponderação das variáveis das classes. A utilização da análise multicritério é um avanço significativo em relação ao procedimento convencional de cruzamento de planos de informação para a definição de áreas de interesse, sendo uma das técnicas empregadas para a tomada de decisão e a sua integração.

Vários métodos multicritérios são utilizados na integração dos fatores, tais como, como a Combinação Linear Ponderada (*Weighted Linear Combination* – WLC) e a Média Ponderada Ordenada (*Ordered Weighted Average* – OWA). Voogd (1983) define a Combinação Linear Ponderada como o método onde os fatores são padronizados de acordo com uma escala numérica, recebem pesos e são combinados por meio de média ponderada. O resultado é um mapa de prioridades que pode ser compartimentado em classes temáticas *fuzzy* (EASTMAN, 2001).

Este método, conforme salienta Torezan (2005), permite guardar toda a variabilidade dos dados contínuos e a compensação das variáveis, de forma que um baixo valor de um determinado índice em uma variável pode ser compensado por um alto valor para outra variável, numa forma de aproximação equilibrada, fugindo dos extremos.

A Média Ponderada Ordenada, segundo Yager (1988), diferencia-se da Combinação Linear Ponderada principalmente pela presença de um segundo grupo de pesos, denominados de pesos de ordenação (EASTMAN, 2001). Os pesos de fatores (Combinação Linear Ponderada), nesse método, são chamados de pesos de compensação (MALCZEWSKI, 1999).

Malczewski (2004) cita que, com o método da Média Ponderada Ordenada, podemos assumir soluções que variam de posições aversas ao risco a muito arriscadas ou amante ao risco. Isto é realizado através dos operadores lógicos AND (Intercessão), OR (União). O método da Combinação Linear Ponderada é formalizado por médias por isso, suas soluções não serão nem arriscadas e nem avessas a risco, estarão no meio dos extremos AND e OR (MALCZEWSKI, 2000).

Para a operacionalização de metodologias que contemplem a análise do meio físico, por exemplo, o modelo booleano é hoje o mais utilizado, devido a maior facilidade da implementação nos softwares e acesso a informações. Por outro lado, no modelo *fuzzy* a atribuição de pesos é decorrente de resultados de técnicas de suporte à decisão, as limitações inerentes aos limites rígidos próprios do modelo booleano são contornadas pelo modelo *fuzzy* através de decisões numéricas. Neste contexto, ferramentas de suporte à tomada de decisão são importantes para a organização e estabelecimento de modelos racionais de combinação de dados e de escolha entre alternativas, baseado em critérios objetivos de julgamento.

A Lógica Fuzzy é a lógica baseada na teoria dos conjuntos fuzzy. Ela difere dos sistemas lógicos tradicionais. Na Lógica Fuzzy, "o raciocínio exato" corresponde a um caso limite do raciocínio aproximado, sendo interpretado como um processo de composição de relações nebulosas.

Na Lógica Fuzzy, o valor verdade de uma proposição pode ser um subconjunto fuzzy de qualquer conjunto parcialmente ordenado, ao contrário dos sistemas lógicos binários, baseados na Lógica Clássica ou Aristotélica, onde o valor verdade só pode assumir dois valores: verdadeiro (1) ou falso (0). Nos sistemas lógicos multivalores, o valor verdade de uma proposição pode ser ou um elemento de um conjunto finito, num intervalo, ou uma álgebra booleana. Na lógica nebulosa, os valores verdade são expressos linguisticamente, tais como, *verdade*, *muito verdade*, *não verdade*, *falso*, *muito falso*, ..., onde cada termo linguístico é interpretado como um subconjunto fuzzy do intervalo contínuo $[0 \;\; 1] \subset \Re$.

Nos sistemas lógicos binários clássicos, os predicados são exatos, ao passo que na Lógica Fuzzy os predicados são nebulosos ou não precisos ou aproximados. Nos sistemas lógicos clássicos, o modificador mais utilizado é a negação enquanto que na Lógica Fuzzy variedades de modificadores de predicados são possíveis: muito alto, *mais ou menos alto, pouco alto, ...*

Nos sistemas lógicos clássicos existem somente os quantificadores existenciais e universais. A Lógica Fuzzy admite uma grande variedade de quantificadores.

A probabilidade, no contexto da Lógica Clássica, é um valor numérico ou um número no intervalo real [0 1]. Ao passo que na lógica nebulosa existe a opção adicional de se empregar probabilidades linguísticas, do tipo: *provável*, muito *provável*, pouco provável, *improvável* etc, chamados de números fuzzy e operados pela aritmética fuzzy (Kaufmann & Gupta, 1985). Também, em contraste com a Lógica Clássica, o conceito de possibilidade é interpretado utilizando-se subconjuntos fuzzy no universo dos reais (Zadeh, 1988), ou seja, 0 representa a impossibilidade e 1 a certeza. Uma das dificuldades do modelo clássico de controle está na representação do modelo matemático que descreve o processo, que requer que se conheça detalhadamente o processo a ser controlado, o que nem sempre é factível.

Várias técnicas, tais como controle linear multivariável (Doyle e Skin, 1981), estimação de estado a partir de medidas ruidosas (Anderson e Moore, 1979), controle ótimo (Sage e White, 1977), sistemas lineares estocásticos (Bertsekas, 1976), além de certas classes de problemas não-lineares determinísticos (Holtzman, 1970), foram desenvolvidas e aplicadas com sucesso em um grande número de problemas bem postulados. Entretanto, todas estas técnicas não são capazes de resolver problemas reais cuja modelagem matemática não é possível. Por exemplo, em diversas situações um volume considerável de informações essenciais somente é conhecido a priori de forma qualitativa. Da mesma forma, quando os critérios de desempenho só estão disponíveis em termos linguísticos. Este fato conduz à imprecisões que inviabilizam o uso da maioria das teorias clássicas.

A modelagem e o controle fuzzy (Lee, 1990) são técnicas para se manusear informações qualitativas de uma maneira rigorosa. As técnicas fuzzy consideram o modo como a falta de exatidão e a incerteza são descritas de tal forma que tornam-se aptas para manipular de maneira conveniente o conhecimento. A grande simplicidade de implementação de sistemas de controle fuzzy pode reduzir a complexidade de um projeto de tal forma que problemas de muito difícil solução, ou de solução impossível, passam a ser solúveis.

4.2 – Fundamentos

Nesta seção serão apresentadas as ideias básicas sobre conjuntos e Lógica Fuzzy visando a modelagem e o desenvolvimento de sistemas em geral e de sistemas de controle em particular. Apesar de existir uma complexa base formal sustentando, por exemplo, seu uso na modelagem e controle de sistemas, será evidenciado aqui somente o necessário para o entendimento da teoria básica de sistemas fuzzy (Pedrycz, 1989; Yager et.al., 1987; Lee, 1990; Albertos, 1992).

Na teoria clássica de conjuntos, um elemento pertence ou não a um dado conjunto de forma inequívoca. Dado um universo *U* e um elemento particular x $\in$ *U*, o grau de pertinência A(*x*) com respeito a um conjunto *A é dado por:*

$$A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A \end{cases}$$

A função A(*x*): $U \rightarrow \{0,1\}$ é chamada de função característica na teoria clássica de conjuntos. Uma generalização desta ideia é utilizada, por exemplo, para manipulação de dados com erros limitados (Figura 3). Todos os números dentro de um erro percentual terão um fator de pertinência 1, tendo todos os demais um fator de pertinência 0.

Observação: na Lógica Fuzzy a função é definida como: $U \rightarrow [0\ 1]$. Ou seja, o Conjunto Imagem é continuo [0 1], ao passo que na Lógica Clássica o Conjunto Imagem é discreto {0,1}.

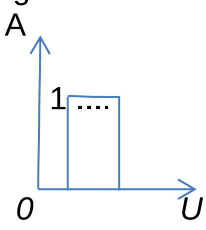


Figura 3

Zadeh (Zadeh, 1965) propôs uma caracterização mais ampla, na medida em que sugere que alguns elementos são mais membros de um conjunto do que outros. O fator de pertinência pode então assumir qualquer valor entre 0 e 1, sendo que o valor 0 indica uma completa exclusão e um valor 1 representa completa pertinência. Esta generalização aumenta o poder de expressão da função característica. Por exemplo, para expressar a ideia de que uma temperatura tem seu valor por volta de 35, pode-se utilizar uma função de pertinência triangular (veja figura 2), com o pico em 35, para sugerir a ideia de que quanto mais perto o número estiver de 35, mais ele se identifica com o conceito representado.

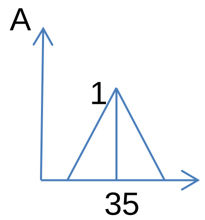


Figura 4

Formalmente, seja *U* uma coleção de objetos denominados genericamente por {u}. *U* é chamado de universo de discurso, podendo ser contínuo ou discreto. Um conjunto fuzzy A em um universo de discurso *U* é definido por uma função de pertinência □A que assume valores em um intervalo contínuo [0 1].

□A: *U* ⟶ [0 1]

O conjunto fuzzy A em U (A $\subseteq$ *U*) é, então, um conjunto de pares ordenados A = {A(u)/u}, u ϵ U

O conjunto suporte de um conjunto fuzzy A é o subconjunto dos pontos u ϵ *U,* tal que □A > 0. Um conjunto fuzzy cujo conjunto suporte é um único ponto de *U* com □A = 1 é chamado de um conjunto unitário.

4.3 – Modelo da Preferência pela Lógica Fuzzy

A preferência de um decisor é intrinsicamente relacionada com seu próprio sistema de valores e sua forma de ser. Portanto, incertezas, imprecisões e ambiguidades são inerentes à tomada de decisão. A abordagem clássica baseada na Lógica Boleana, Lógica Clássica binária, tende a representar a preferência humana através de modelos que consideram os julgamentos humanos precisos, bem definidos e determinados. Para representar julgamentos vagos ou imprecisos, a Lógica Fuzzy (ou nebulosa) pode ser mais adequada. A ideia de relações de preferência nebulosas aparece na literatura pela primeira vez em dois artigos: em 1977 com Roy [60] e em 1978 com Orlovsky [61].

O primeiro apresenta o método Electre III, que associa um índice de credibilidade, com valor no intervalo contínuo [0 1] para a relação de sobreclassificação. O segundo propõe a modelagem de relações de preferência e indiferença nebulosas. Hoje, existem vários métodos que se baseiam em relações nebulosas de preferência, como os conhecidos Electre [62] e o Promethee [35]. Ambos foram desenvolvidos antes que qualquer fundamentação axiomática fosse proposta. Vale ressaltar que a teoria exposta aqui não serve de base para esses dois métodos, embora possa ser empregada em outros que venham a existir.

Capítulo 5
MAUT – Multiatribute Utility Theory

5.1 – definições

O Apoio Multicritério à decisão, por princípio, busca relações de preferências subjetivas entre as alternativas influenciadas por vários critérios.

A Teoria da Utilidade é a representação das preferências relativas de um indivíduo/decisor entre os elementos de um conjunto, usando-se números reais para representá-los. A utilidade é uma expressão quantitativa do valor de satisfação associado a um resultado.

A Teoria da Utilidade Multicritério (Multiple Attribute Utility Theory - MAUT), é derivada da Teoria da Utilidade, na questão do tratamento de problemas com múltiplos objetivos.

A Teoria assume que todos os estados são comparáveis e que existe transitividade na relação de preferência e indiferença. A Teoria de Utilidade Multicritério é um método discreto, por possuir número de alternativas discretas, sendo empregado para determinar a importância atribuída a um critério em relação a outro e priorizar alternativas a partir da construção de uma função matemática. Se um determinado critério for pouco importante diante de outros critérios, ele terá um peso atribuído menor, em comparação aos atribuídos aos demais critérios. Representa-se esta importância relativa de cada critério pelo conceito de taxa de substituição – trade-off (GOMES & MOREIA, 1998), (MIRANDA & ALMEIDA, 2004). Para selecionar uma ou mais alternativas “a”, entre as alternativas existentes “A”, associa-se “n” índices de valor “X” que são denominados de critérios.

Os critérios X_i e X_j representam consequências diferentes no julgamento de uma alternativa e são medidos, normalmente, em unidades diferentes.

Para escolher uma alternativa “a” em “A” que seja condizente com os critérios $X_1(a)$, $X_2(a)$, ..., $X_n(a)$, uma escala de preferência ou valor é utilizada. Assim, especifica-se uma função de valor escalar “v”, a equação a seguir definida no espaço das consequências com a seguinte propriedade:

$v(x_1, x_2, \ldots x_n) \geq v(x_1', x_2', \ldots x_n') \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots x_n) \text{ ¥ } (x_1', x_2', \ldots x_n')$

O símbolo “¥” significa “preferível”; a função “v”, denomina-se função utilidade. Logo, dado um “v”, o decisor escolhe “a” em “A”, tal que “v” seja maximizado. A função de valor “v” serve para comparar vários níveis de diferentes critérios, através de x_i, i ϵ $\{1, \ 2, \ldots, n\}$. (GOMES & MOREIRA, 1998), (ALMEIDA, 2005).

5.2 - Função de Utilidade Aditiva

A Função de Utilidade Aditiva é uma das funções de utilidade multicritério utilizada quando o objetivo não é monetário. A Função de Utilidade atribui utilidades a cada uma das escalas (objetivos) que devem ser medidos. A Função Utilidade $U_i(x_i)$ calcula a utilidade de cada alternativa, e seleciona a de maior utilidade.

Sejam as funções de utilidade $U_1(x_1)$, $U_2(x_2)$, ... , $U_m(x_m)$, dos m critérios.

A utilidade para cada uma das alternativas é calculada com os pesos K_1, K_2, ... , K_m para cada um dos critérios.

A Função de Utilidade aditiva é definida da seguinte forma:

$U(x_1, x_2, \ldots, x_m) = K_1 U_1(x_1) + K_1 U_2(x_2) + \ldots + K_m U_m(x_m) = \sum_{i=1}^{m} K_i U_i(x_i)$.

A Função de Utilidade aditiva tem valores no intervalo contínuo [0 1] para cada um dos critérios e com $\sum_{i=1}^{m} K_i = 1$. O escore final de todas as alternativas ϵ [0 1], sendo 0 a nota da pior alternativa e 1 da melhor alternativa. A escala pode ou não ser linear.

5.3 - Método para atribuição de utilidade - Swing Weighting

Trata-se de um método, entre muitos outros, para atribuir a utilidade de cada critério. A escala ϵ [0 1] é linear, o valor de utilidade 1 refere-se à melhor alternativa e o valor 0 à pior. Os valores reais entre 0 e 1 são calculados da seguinte maneira:

$$U_i(x) = (x - \text{pior valor}) \div (\text{melhor valor} - \text{pior valor})$$

O método é desenvolvido em quatro passos:

1º Passo:

Construir uma tabela mostrando na primeira linha o “Benchmark” (pior solução possível) dentro dos critérios em questão. Definido o “Benchmark”, em cada uma das linhas a seguir varia-se apenas um dos critérios para a melhor condição possível.

2º Passo:

Arbitrar, na tabela, um rank entre as alternativas. Obviamente o caso “Benchmark” será o pior ficando sempre em último lugar. Já para as demais alternativas, o decisor decidirá conforme seu fator de preferência entre os critérios.

3º Passo:

Atribuir pontos para cada critério conforme seu rank. Pela definição do método, o “Benchmark” recebe 0 pontos e o caso de rank 1, recebe 100 pontos. O decisor decide os pontos dos demais critérios. Ao final somam-se os pontos.

4º Passo:

Calcular o peso de cada critério usando a equação:

peso do atributo = (número de pontos do atributo) ÷ (total de pontos).

CAPÍTULO 6
TODIM - Tomada de Decisão Interativa Multicritério

6.1 - Teoria dos Prospectos

A Teoria dos Prospectos é estudada na psicologia cognitiva e tem como base a modelagem do comportamento do ser humano em face ao risco, questão afeta à tomada de decisão. O comportamento de decisores mostra que, nas situações que envolvem ganhos, seres humanos tendem a ser mais conservadores em relação ao risco e, em situações que envolvem perdas, mostram-se mais propensos ao risco. Ou seja, quando há uma situação em que se pode ganhar, prefere-se um ganho menor, com maior probabilidade de ganho certo, a se arriscar por ganhos maiores e incertos. Nas situações que envolvem perdas, as pessoas se arriscam a perder mais, porém, com a possibilidade de nada perderem, a ter uma perda menor, porém, certa. O método TODIM utiliza na sua fundamentação a Teoria dos Prospectos, incorporando a curva da função de valor determinada experimentalmente por Kahneman e Tversky (1979) ao seu modelo analítico. A curva experimental a seguir:

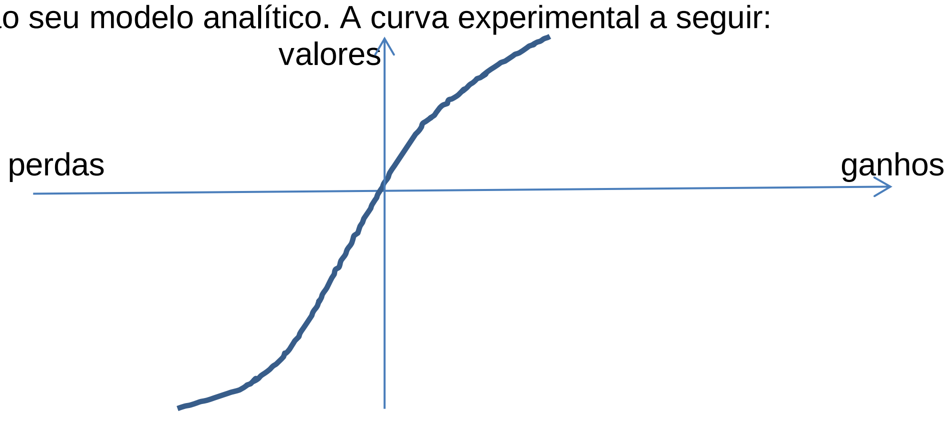


Figura 5

A partir dessa função de valor (valor(x) ≅ x^n – n ϵ R - ~hipérbole), permite-se estabelecer uma medida quantitativa da satisfação das pessoas, inserindo ao modelo a aversão e a propensão ao risco.

6.2 - O método TODIM

O método TODIM - Tomada de Decisão Interativa Multicritério, é um método multicritério de análise de decisão, desenvolvido pelo professor brasileiro Luiz Flávio Autran Monteiro Gomes. Sua aplicação obtém como resultado as alternativas em ordem de preferência. O método utiliza modelagem matemática baseada em matrizes de comparações por pares, como no AHP - Analytic Hierarquy Process (veremos, detalhadamente, mais adiante), incorporando em seu modelo a Teoria dos Prospectos de Kahneman e Tversky (1979), na qual se descreve o comportamento do ser humano em face ao risco. Sobre esse método existem vários textos na literatura, tais como: (GOMES; ARAYA; CARIGNANO, 2004), e artigos (GOMES; LIMA, 1992; GOMES; RANGEL, 2009).

Antes de iniciar a modelagem do problema, é necessário que os critérios sejam bem selecionados, de forma que não sejam contemplados mais de uma vez (CLEMEN, 1996).

O método TODIM baseia-se, também, na Teoria da Utilidade Aditiva e, para que haja separabilidade entre os critérios, estes devem ser mutuamente preferencialmente independentes. Um atributo Y é dito preferencialmente independente do atributo X se as preferências para resultados específicos de Y não dependerem do nível do atributo X, e vice-versa.

Selecionados os critérios e as alternativas, constroem-se duas matrizes. A primeira é a matriz de julgamentos, que possui n (número de alternativas) linhas e m (número de critérios) colunas. Após, é realizada uma consulta a pessoas (especialistas) capazes de opinar sobre a importância relativa das diversas alternativas, critérios e subcritérios do problema, sempre a partir de sua representação através da hierarquia. Os decisores dão valor para cada uma das alternativas, critérios e subcritérios, e inserem estes valores na matriz.

Para exemplo simples, os valores puramente quantitativos (por exemplo, preço de um determinado produto) são facilmente inseridos nas colunas. Para julgamentos subjetivos (por exemplo, beleza, conforto etc), são designados valores por meio da leitura (GOMES; LIMA, 1992), relacionando estes julgamentos através de uma escala numérica. Após, normaliza-se através da divisão de cada coluna pelo seu maior valor. A segunda matriz é a de comparação entre pares de critérios. Nessa matriz, comparam-se os critérios entre si da mesma forma como se faz com o método AHP, conforme veremos mais adiante.

O método TODIM tem como resultado final o valor global das alternativas por ordem de preferência. Para os cálculos dos valores de cada alternativa, é necessário que sejam determinadas as dominâncias de cada alternativa em relação a cada uma das outras. A incorporação da Teoria dos Prospectos pelo método TODIM se faz pela introdução dessa função de valor nas medidas de dominância de uma alternativa sobre a outra. As perdas e os ganhos são definidos como diferenças entre os valores w estabelecidos na matriz de julgamentos, para todas as alternativas. As equações constitutivas do método, são:

$\delta (i, j) = \sum_{c=1}^{m} \emptyset c\ (i, j), \ \forall\ i, j$

$$\delta(i, j) = \begin{cases} (a_k (W_k - W_{jc}) / \Sigma_c a_{rc})^{1/2}, & \text{se } W_k - W_{jc} > 0 \\ 0, \text{ se } w_k - w_{jc} = 0 & \\ -1/\theta \{[(\Sigma_c a_{rc} - (W_{jc} - W_{ic})]/a_{rc}\}^{1/2}, & \text{se } W_k - W_{jc} < 0 \end{cases}$$

Onde:

- δ (i, j) = medida de dominância da alternativa i sobre a alternativa j;
- m = número de critérios;
- c = critério genérico variando de 1 a m;
- a_{rc} = taxa de substituição do critério c pelo critério r (elemento da matriz de comparação por pares de critérios);
- w_{ic}, w_{jc} = pesos das alternativas i e j, respectivamente, em relação ao critério c;
- θ = fator de atenuação de perdas.

Na prática, a função de valor do TODIM se torna proporcional à raiz quadrada da diferença entre os valores w. Isso significa que, dado o aumento da diferença, maior será o valor da função Φ(i, j), porém ocorrerá em taxas decrescentes, como ocorre quando se interpreta o conceito da função de valor da Teoria dos Prospectos, indicando a aversão ao risco.

Após serem efetuados os cálculos, é montada a matriz quadrada δ (i, j), n x n, onde n é o número de alternativas. Esta matriz é denominada matriz de dominâncias relativas das alternativas. Os valores totais das alternativas são determinados através ξ_i, da forma:

$$\xi_i = [\sum_{j=1}^{n} \delta\,(i, j) - \text{Min}_j \sum_{j=1}^{n} \delta\,(i, j)] \div [\text{Max}_i \sum_{j=1}^{n} \delta\,(i, j)] - \text{Min} j \sum_{j=1}^{n} \delta\,(i, j)]$$

Cada valor ξ é uma soma de linhas normalizadas da matriz de dominâncias. Depois de calculados os valores, estes são ordenados e, assim, determinam-se as alternativas a serem escolhidas.

CAPÍTULO 7
ELECTRE – Elimination and Choice Translating Reality for Enrichment Evaluation

7.1 – fundamentos

O conceito de relação de ***sobreclassificação*** foi criado pela Escola Francesa, com o objetivo de representar atitudes do decisor não permitidas pelos métodos existentes, principalmente, a Escola Americana, como, por exemplo, a obrigatoriedade da propriedade transitiva.

A abordagem, desenvolvida por pesquisadores americanos, foi criticada pela Escola Francesa por exigir um decisor puramente racional, capaz de definir sua preferência entre quaisquer duas alternativas. Além de não admitir atitudes de indecisão, a teoria multi atributo americana exige que a preferência seja sempre transitiva – a grande crítica à escola francesa é não obrigatoriedade da relação transitiva - o que impede a representação de atitudes reais do decisor.

Este é o caso, por exemplo, que pode ocorrer quando se compara, dois a dois, candidatos a um determinado cargo eletivo: se o candidato A é preferível ao candidato B e este é preferível ao candidato C, em algum caso pode acontecer do candidato A não ser preferível ao candidato C. Assim, neste caso, não valeria a propriedade transitiva.

Este exemplo, serve para ilustrar, também, que o nosso sistema atual de eleições onde ocorre o chamado segundo turno, pode não refletir a real preferência do eleitor, caso fosse feita a comparação entre os candidatos, dois a dois.

O mesmo pode ocorrer, por exemplo, no Campeonato Mundial de Futebol, a partir das oitavas de final ocorre o chamado “mata-mata”, onde as seleções se enfrentam duas a duas e o perdedor é eliminado do torneio. O time A ganhar do time B, este ganhar do C e o time A perder para o time C. Neste caso, também, não valeria a propriedade transitiva. Neste exemplo, o time classificado – time vencedor – poderia variar dependendo da ordem que eles se confrontassem, ou seja, dependendo do “sorteio” da “ordem” do confronto entre os times.

Este fato seria melhor representado se todos os times se enfrentassem entre si, no chamado “campeonato corrido”, sendo considerado campeão o que obtivesse o maior número de pontos. Neste exemplo, o time classificado – time vencedor – poderia variar dependendo da ordem que eles se confrontassem, ou seja, dependendo do “sorteio” da “ordem” do confronto entre os times.

Entre os métodos da Escola Francesa, Electre - *Elimination and Choice Translating Algorithm* - e Promethee – *Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations* - são os que mais se destacam. Esses métodos, ao contrário daqueles baseados na teoria da utilidade, não tem base teórica axiomática, o que há na atualidade são várias tentativas de se formalizar seus fundamentos. O Promethee Multiplicativo foi desenvolvido a partir de alterações feitas nos critérios do método Promethee II e sua vantagem consiste no fato de que ele, em geral, fornece resultados mais coerentes com os pesos adotados para cada critério. Exceto o Método AHP – Analytic Hierarquy Process – onde todas as passagens e afirmações são rigorosamente demonstradas matematicamente, todos os outros métodos tem pouca axiomatização dos seus fundamentos e pouquíssimas demonstrações das suas afirmações. As vezes ocorre de afirmarem determinadas condições que, em geral, não são verdadeiras, tomarem como solução ótima aquela que não corresponde à realidade como, por exemplo, ocorre no “Método Pareto” e no “Método Evolucionário”, no chamado “Algoritmo Genético”.

Formalização:

Os métodos baseados em relações de sobreclassificação possuem duas etapas:

1 - construção da relação de sobreclassificação;

2 - exploração dos resultados da etapa anterior.

O processo de construção consiste em comparar as alternativas, considerando todos os critérios. Assim, no caso de haver n alternativas e m critérios, são necessárias pelo menos $m \times n(n-1)/2$ comparações. Em geral, a relação de sobreclassificação “*S*” *se dá* a partir da comparação entre as alternativas de *A*, utilizando-se as relações *P*, *Q* e *I*. As comparações podem ser realizadas de várias formas distintas, sendo que no Electre I, as comparações baseiam-se no princípio de concordância e discordância. Ou seja, a afirmativa - a alternativa “*a*” *é* pelo menos tão boa quanto a alternativa “*b*” - é aceita se, e somente se, as duas condições a seguir são satisfeitas:

• para a maior parte dos critérios, se são concordantes, a afirmativa é válida;

• a oposição da minoria restante, os critérios discordantes, não é suficientemente forte para invalidar essa afirmativa.

A relação característica das estruturas utilizadas pelos métodos da Escola Americana e a relação de sobreclassificação, utilizada pelos métodos da Escola Francesa, possuem em comum a mesma interpretação: ambas podem ser lidas como “é pelo menos tão boa quanto”, entretanto existem críticas de uma em relação à outra.

Podemos obter diferentes estruturas de relações de preferência, isto levou os pesquisadores a analisarem os estágios de construção e de exploração dos métodos da Escola Francesa. Os trabalhos que abordam o segundo estágio em geral analisam várias formas de se realizar a exploração das relações de sobreclassificação, assumindo que essas podem ser aplicadas a qualquer estrutura de relações de preferência.

Nos métodos Electre I e Electre III, a relação de sobreclassificação pode ser qualquer relação binária reflexiva, ou seja, $\forall$ a ϵ A, a R a — ordinária no caso de Electre I e nebulosa no caso de Electre III. No conceito de discordância, os métodos Electre admitem julgamentos em que a relação de sobreclassificação não é transitiva, ou seja, $\forall$a, b, c ϵ A, se a R b e b R c $\rightarrow$ a R c, não ocorre sempre.

Logo, a relação de sobreclassificação nem sempre é capaz de produzir a ordenação das alternativas de *A*. Logo, resulta a necessidade de um segundo estágio, em que as relações construídas entre as alternativas são exploradas segundo diretrizes conforme o tipo de problema.

A Escola Americana coloca, para a decisão coletiva, como obviamente lógica, a necessidade da propriedade reflexiva e da propriedade transitiva. Os defensores da Escola Americana colocam que se eliminarmos esta condição a ordem em que as alternativas são votadas (decididas) torna-se extremamente importante e decisiva. A questão relevante passa a ser não quem vota, mas sim quem controla ou decide a maneira pela qual a votação deverá ocorrer e, este fato, para essa escola é inaceitável.

O resultado final pode ser a seleção de um conjunto de alternativas consideradas satisfatórias; a ordenação de todas as alternativas ou a classificação de alternativas em categorias pré-definidas.

Por outro lado, os métodos da família Promethee foram desenvolvidos com a preocupação de manter a flexibilidade dos métodos Electre e de facilitar o seu uso operacional. Para atingir este objetivo são exigidos parâmetros de entrada mais intuitivos e cujo significado e influência nos resultados finais são mais previsíveis. Os métodos Promethee I e Promethee II não utilizam o princípio de concordância e discordância para construir as relações entre as alternativas, eles se baseiam no conceito de fluxo de rede – network flows - da teoria dos grafos.

Os fluxos de entrada e de saída de uma alternativa mostram o quanto ela é preferida em relação às demais. Para calcular esses fluxos, são realizadas comparações entre cada alternativa de *A* e cada uma das demais alternativas. Essas comparações são baseadas em uma função preferência $p_i(a, b) : A \rightarrow [0, 1] \varepsilon \Re$, de tal modo que:

• π (*a, b*) tende a 1 quanto mais forte for a preferência de *a* em relação a *b*;

• π (*a, b*) tende a 0 quanto mais fraca for a preferência de *a* em relação a *b* ou seja, quanto maior for a indiferença entre *a* e *b*.

Estas condições guardam relação direta com a probabilidade: a se aproxima de b assintoticamente, sendo 1 a “certeza absoluta”. Analogamente, o mesmo ocorre em relação ao zero.

A relação de sobreclassificação dos métodos Promethee I e II, caracteriza-se por apresentar propriedades bem definidas: no Promethee I, "*S" é* uma relação de preordem parcial, admitindo julgamentos de incomparabilidade, e no Promethee II, é uma relação de preordem completa. Em ambos os métodos, "*S"* possui a propriedade transitiva, sendo por isso capaz de gerar a ordenação das alternativas, sem que seja necessário executar procedimentos de exploração das relações de sobreclassificação, complexos quanto os dos métodos Electre.

7.2 – Os Métodos Electre

Para duas alternativas "a" e "b", temos três casos:
• "a" é indiferente a "b" - notação: a I b;
• "a" é estritamente preferido a "b" - notação: a P b;
• "b" é estritamente preferido a "a" - notação: b P a.

As situações intermediárias são preferência fraca de "*a"* em relação a "*b"* e incomparabilidade entre alternativas:
• a relação de preferência fraca de a em relação a b - nota-se a Q b - ocorre se o decisor ficar na dúvida entre a I b e a P b, mas está certo de que a relação b P a é inválida;
• a relação de incomparabilidade – nota-se a J b - ocorre se nenhuma das situações a P b, b P a, a Q b, b Q a, a I b ou b I a predomina.

As consequências da implementação (ou atributos) de $a \in A$ *são* dadas por $f_1(x_a)$, $f_2(x_a)$, ... , $f_m(x_a)$ e quanto menor o valor da função objetivo, melhor é a alternativa.
As consequências são avaliadas a partir de funções objetivo. Essa avaliação pode corresponder a medidas físicas ou a grandezas que não podem ser medidas fisicamente, como, por exemplo, o conceito de beleza ou a referência a preferência de cor.

Dado um critério c_i, a comparação entre os valores $c_i(f_i(x_a))$ e $c_i(f_i(x_b))$ reflete o resultado da comparação entre *a* e *b.* Introduzindo-se os parâmetros p_i e q_i e a diferença $d_i = f_i(x_b) - f_i(x_a)$ é possível modelar, através das inequações a seguir, as relações de preferência P_i e indiferença I_i, restritas ao critério c_i:

$d_i \leq q_i \Leftrightarrow a\ I_i\ b$

$d_i > p_i \Leftrightarrow a\ P_i\ b$

Na representação clássica dessas relações, os parâmetros p_i e q_i *são* considerados nulos. Entretanto, na prática $p_i = q_i = 0$ é muitas vezes considerado irreal por não representar situações de indecisão, como quando o valor de d_i é ligeiramente maior do que zero e insuficiente para caracterizar uma preferência estrita. A introdução dos parâmetros p_i e q_i não nulos possibilita representar o caso de preferência fraca a Q_i b, através do intervalo não incluído pelas inequações $q_i < d_i \leq p_i$.

Define-se a relação binária de sobreclassificação restrita S_i, neste contexto. Por definição, a relação a S_i b é válida somente se a diferença d_i constitui um argumento que justifique a afirmativa: "considerando-se apenas o critério c_i, a alternativa *a é* pelo menos tão boa quanto a alternativa *b*". A relação *a* S_i *b* compreende os casos que vão desde a indiferença a I_i b até a preferência estrita a P_i b, incluindo as hesitações entre esses dois casos. A inequação abaixo modela matematicamente o conceito de relação de sobreclassificação restrita ao critério c_i:

$d_i \geq -q_i \Rightarrow a\ S_i\ b$.

A relação S de sobreclassificação compreende o conceito de S_i para todos os *m* critérios, a S b é válida somente se as diferenças entre os vetores C(a) e C(b), que contém as avaliações das alternativas a e b segundo os *m* critérios, constituem um argumento que justifique a afirmativa: “considerando-se todos os critérios, a alternativa a é pelo menos tão boa quanto a alternativa b”. O critério c_i que atende à condição a S_i b e à inequação é designado critério concordante com a S b. O conjunto de critérios em concordância com a S b é designado ***coalizão concordante***, sendo representado pelo símbolo Conc (a S b). O critério c_i que atende à condição b P_i a é dito discordante com a afirmativa a S b. O conjunto de critérios em discordância com a S b é denominado ***coalizão discordante*** e representado pelo símbolo Conc (b P a), por concordar com a afirmativa *b P a*.

Por definição, os critérios que não concordam ou discordam com a S b formam o conjunto aqui denominado ***coalizão hesitante***, representado pelo símbolo Conc (b Q a), uma vez que atendem à inequação $-q_i < d_i \leq -p_i$.

Assim, cada critério encaixa-se necessariamente em um dos três conjuntos:

Conc (a S b), Conc (b P a) ou Conc (b Q a).

7.3 - Electre I

O primeiro método da família Electre, é empregado quando se deseja selecionar não uma única solução, mas um conjunto de soluções consideradas satisfatórias pelo decisor e quando é razoável fixar os parâmetros $p_i = q_i = 0$ para todos os critérios. Em Electre I, define-se a relação de sobreclassificação *S* como:

$A\ S\ b \Leftrightarrow Iconc\ (a, b) \geq c \wedge Idisc_i\ (a, b) \leq d,\ \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$

Nesta equação, as constantes *c* e *d são* denominadas, respectivamente,

limites de concordância e *discordância*. Na prática, c e d assumem valores no intervalo [0 1] $\in \Re$ e, geralmente, c > d.

Grafo original Grafo reduzido

Figura 6 – exemplo de circuito

A partir dessa relação é possível construir um grafo direcionado em que os nós correspondem às possíveis soluções e os arcos interligam os pares de alternativas (*a, b*) que atendem à relação *a S b*. Usualmente, os arcos são representados de maneira que se *a S b*, então o arco parte de *a* e aponta para *b*. A solução final para o problema de tomada de decisão constitui o kernel do grafo da relação *S*, sendo definida pelo subconjunto *N* de soluções que atendem às condições:

• cada elemento do conjunto N^c *é* sobreclassificado por pelo menos um elemento de *N*;

• nenhum elemento de *N* sobreclassifica qualquer elemento de *N*.

Caso as preferências do decisor gerem circuitos no grafo, esses devem ser eliminados antes de se definir o kernel. Para eliminá-los, seus vértices são substituídos por um único elemento, originando um grafo reduzido. Vale notar que esta modificação elimina possíveis intransitividades transformando-as em

julgamentos de indiferenças, como ilustra a figura 6 anterior, onde o circuito *a S b S c é* substituído pela alternativa *a*.
A partir do Electre I foram construídos os modelos Electre II e Electre III.

Capítulo 8
PROMÉTHEE – Preference Ranking Method for Enrichment Evaluation

8.1 - Métodos Promethee

Nestes métodos, o resultado da comparação entre duas alternativas quaisquer *a* e *b é* expresso em termos de uma ***função de preferência*** que deve refletir, para cada critério, o nível de preferência de *a* em relação a *b*. Assim, levando-se em conta apenas a avaliação segundo o critério c_i, tem-se que:

- $p_i(a, b) = 0$ - indica indiferença entre *a* e *b*;
- $p_i(a, b) \sim 0$ - indica preferência fraca de *a* em relação a *b*;
- $p_i(a, b) \sim 1$ - reflete uma preferência forte de *a* em relação a *b*;
- $p_i(a, b) = 1$ - reflete preferência estrita de *a* em relação a *b*.

Em geral, $p_i(*)$ é uma função da diferença entre a avaliação das consequências de ambas alternativas. Assim, no caso da otimização multiobjetivo, dado que $d_i = f_i(x_b) - f_i(x_a)$, tem-se que $p_i(a, b) = p_i(d_i)$. Quando o problema é de minimização, a curva referente a $p_i(d_i)$ deve ser não decrescente para $d_i > 0$ e nula para $d_i \leq 0$.

Critério usual:

$$p_i(d_i) = \begin{cases} 0, \text{ se } di \leq 0 \\ 1, \text{ se } di > 0. \end{cases}$$

Quase-critério:

$$p_i(d_i) = \begin{cases} 0, \text{ se } di \leq t_i \\ 1, \text{ se } di > t_i \end{cases}$$

Critério degrau:

$$P_i(d_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } d_i \leq t_i \\ ½ & \text{se } t_i < d_i \leq q_i \\ 1 & \text{se } d_i > q_i \end{cases}$$

Critério linear:

$$p_i(d_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } d_i \leq t_i \\ (d_i - t_i) / (q_i - t_i) & \text{se } t_i < d_i \leq q_i \\ 1 & \text{se } d_i > q_i \end{cases}$$

Critério gaussiano:

$$p_i(d_i) = \begin{cases} 1 - \exp(-d_i^2 / (2\sigma_i^2)) & \text{se } d_i > 0 \\ 0 & \text{se } d_i \leq 0. \end{cases}$$

Tendo especificado uma função p_i (d_i) e um peso w_i para cada critério, de modo que $\sum_{i=1}^{m} Wi = 1$, calcula-se então o índice de preferência multicritério Π(*a, b*), que reflete a intensidade da preferência global (para todos os critérios) da alternativa *a* em relação a *b.*

Observação:

Uma das limitações desse método está na ausência de regras formais para a definição dos pesos de cada critério.

$\Pi(a, b) = \sum_{i=1}^{m} W_i p_i$; $\Pi(a, b) \in]0\ 1[$

Esse índice assume valores entre 0 e 1 de modo que:

- $\Pi(a, b) \sim 0$ - indica preferência fraca global de *a* em relação a *b*;
- $\Pi(a, b) \sim 1$ - indica preferência forte global de *a* em relação a *b*.

As comparações entre as alternativas podem ser representadas através de grafos direcionados em que cada nó corresponde a uma alternativa e cada arco a uma relação de preferência global. Entre dois nós *a* e *b* existem sempre dois arcos, aos quais são associados os índices Π(*a, b*) e Π(*b, a*).

Nesse grafo, o fluxo total que entra no nó *a* $(b \rightarrow a)$ *é* calculado por:

$\varphi_{in}(a) = \sum_{\forall b \in A} \Pi(b, a)$

Analogamente, o fluxo total que sai do nó a $(a \rightarrow b)$ pode ser calculado por:

$\varphi_{out}(a) = \sum_{\forall b \in A} \Pi(a, b)$

Enfim, o fluxo de rede no nó *a* *é* definido como a diferença entre o fluxo que sai e o que entra:

$\varphi(a) = \varphi_{out}(a) - \varphi_{in}(a)$.

Os métodos Promethee I e II constroem de formas diferentes, a partir desses fluxos (φ, φ_{out}, φ_{in}), suas relações de sobreclassificação e, na etapa de exploração dessas relações, cada um deles promove um tipo de ordenação. Enquanto no Promethee I é gerada uma preordem parcial, admitindo a incomparabilidade entre alternativas, no Promethee II, por sua vez, é gerada uma preordem completa.

8.2 - Promethee I

No Promethee I, a partir dos valores dos fluxos φ_{out} e φ_{in} são definidas, respectivamente, as relações de sobreclassificação positiva, $S^+ = P^+ \cup I^+$, e negativa, $S^- = P^- \cup I^-$, de modo que:

- $a\ P^+\ b \Leftrightarrow \varphi_{out}(a) > \varphi_{out}(b)$;
- $a\ I^+\ b \Leftrightarrow \varphi_{out}(a) = \varphi_{out}(b)$;
- $a\ P^-\ b \Leftrightarrow \varphi_{in}(a) < \varphi_{in}(b)$;
- $a\ I^-\ b \Leftrightarrow \varphi_{in}(a) = \varphi_{in}(b)$.

Na etapa de exploração das relações de sobreclassificação, as alternativas são ordenadas em conformidade, se e somente se:

- $(a\ P^+\ b \wedge a\ P^-\ b)$ ou $(a\ P^+\ b \wedge a\ I^-\ b)$ ou $(a\ I^+\ b \wedge a\ P^-\ b)$, então a é preferida à b.
- $a\ I^+\ b$ e $a\ I^-\ b$, então a é indiferente à b.
- Caso contrário, a e b são incomparáveis.

8.3 - Promethee II

No Promethee II, as relações de sobreclassificação são definidas diretamente a partir dos fluxos de rede calculados para cada alternativa, se e somente se:
• $\varphi(a) > \varphi(b) \rightarrow$ a é preferida à b;
• $\varphi(a) = \varphi(b) \rightarrow$ b é preferida à a.

8.4 - Promethee Multiplicativo

O método Promethee II é aplicado na escolha da solução final para problemas de otimização multiobjetivo. Em um primeiro passo, o programa NSGAII é executado a fim de encontrar um conjunto discreto de soluções eficientes.
Posteriormente, o Promethee II é usado para ordená-las em conformidade com a preferência do decisor. A alternativa escolhida como solução final é a que possuir um maior fluxo de rede φ. Alguns resultados obtidos levando-se em conta problemas de otimização analíticos mostram que o Promethee II, frequentemente, não produz resultados consistentes com os pesos dos critérios para problemas em que a fronteira Pareto delimita a parte não convexa da região viável. Esse fato estimulou o desenvolvimento de uma nova versão, que não possua essa limitação.

A versão Multiplicativa do Promethee II aqui proposta assemelha-se à original em muitos aspectos. Ambas começam com a especificação de funções de preferência para cada critério. A grande diferença reside na forma como se computa o fluxo de rede e se define a relação de sobreclassificação em cada uma delas. Na versão multiplicativa, o fluxo de rede de cada alternativa não exige o cálculo do índice de preferência global. Por outro lado, a versão multiplicativa define um grafo direcionado para cada critério, de modo que existam dois arcos entre cada par de nós (*a, b*) e a cada arco seja associada uma função de preferência p_i (*a, b*). Assim, considerando-se o i-ésimo grafo, o fluxo de rede para o i-ésimo critério é definido como mostra a Equação: $\varphi_i(a) = \sum_{\forall b \in A} p_i(a,b) - p_i(b,a)$

Um novo parâmetro, denominado ***Índice de Sobreclassificação***, agrega os valores do fluxo de rede em todos os grafos para cada alternativa, dando uma ideia global do quanto cada alternativa é preferida em relação às demais, levando-se em conta também o peso de cada critério, da seguinte forma: $O(a) = \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(a)^{w_i}$

Nesta equação, $\Phi_i(a) = \varphi_i(a) + |\varphi min_i|$, onde φmin_i é o valor mínimo assumido por φ_i. Como φ_i pode assumir valores negativos, o incremento de $|\varphi min_i|$ é essencial para impedir valores complexos em O(a). Finalmente, as alternativas são ordenadas baseado no Índice de Sobreclassificação de tal modo que:
• se O(a) = O(b), então a é indiferente à b;
• se O(a) > O(b), então a é preferida à b.

Capítulo 9
TOPSIS – Techinique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution

Problemas de tomada de decisão multicritério, em geral, possuem:

- um número finito de alternativas;
- múltiplos critérios (atributos) conflitantes;
- um vetor de pesos indicando a importância de cada critério.

Ao longo dos últimos anos, esforços e avanços significativos foram feitos para o desenvolvimento de várias metodologias para solucionar problemas de tomada de decisão multicritério.
Uma das técnicas de tomada de decisão muito utilizada é conhecida como TOPSIS - Technique for Order Preference by Smilarity to Ideal Solution - para avaliar o desempenho das alternativas através da similaridade com a solução ideal. Por essa técnica, a melhor alternativa é aquela mais próxima da solução ideal positiva e a mais distante da solução ideal negativa. A solução ideal positiva é uma solução que maximiza os critérios de benefício e minimiza os critérios de custo; já a solução ideal negativa maximiza os critérios de custo e minimiza os critérios de benefício. Resumindo, a solução ideal positiva é composta de todos os melhores valores atingíveis dos critérios de beneficio; já a solução ideal negativa consiste em todos os piores valores atingíveis dos critérios de custo.

9.1 - Tomada de Decisão Multicritério

A matriz de decisão A - m x n - composta por m alternativas e n critérios é descrita por:

$$A = \begin{array}{c|ccc|} & C_1 & \dots & C_n \\ A_1 & X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & Xm_1 & & Xmn \end{array}$$

$A_1, A_2, \dots, A_m$ são alternativas viáveis; $C_1, C_2, \dots, C_n$ são critérios; x_{ij} ; $\forall$ i ϵ $\{1, 2, \dots , m\}$; $\forall$ j ϵ $\{1, 2, \dots , n\}$; indica o desempenho da alternativa A_i segundo o critério C_j . O vetor de peso $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, composto pelos pesos individuais para cada critério C_j, satisfaz $\sum_{j=1}^{n} W_j = 1$. Os dados da matriz *A* deve ser normalizada a fim de transformá-la numa matriz adimensional para que possibilite comparação entre os vários critérios. A matriz *A* é normalizada para cada critério *Cj* de acordo com:
$p_{ij} = x_{ij} \div \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$; i ϵ $\{1, 2, \dots , m\}$; j ϵ $\{1, 2, \dots , n\}$
Uma matriz de decisão normalizada A_n representa o desempenho relativo das alternativas e pode ser descrita por $A_n = (p_{ij})_{mxn}$; i ϵ $\{1, 2, \dots , m\}$; j ϵ $\{1, 2, \dots , n\}$.

A seguir será descrita a técnica de tomada de decisão multicritério TOPSIS - *Técnica para avaliar o desempenho de alternativas através da similaridade com a solução ideal.*

De um modo geral, os critérios de avaliação podem ser classificados em dois tipos: *benefício* e *custo*. O critério *benefício* significa que um valor maior é melhor enquanto que para o critério *custo* vale o inverso.

O algoritmo para calcular a melhor alternativa segundo a técnica TOPSIS é descrito de acordo com os seguintes passos:
Passo 1: Cálculo das soluções ideais positivas A^+ (benefícios) e das soluções ideais negativas A^- (custos), da seguinte forma:
$A^+ = (p^+_1, p_2^+, \dots, p_m^+)$
$A^- = (p_1^-, p_2^-, \dots, p_m^-)$
Onde:
$P^+_j = (\max_i p_{ij} , j \in J_1; \min_i p_{ij} , j \in J_2)$
$P^-_j = (\min_i p_{ij} , j \in J_1; \max_i p_{ij} , j \in J_2)$
J_1 e J_2 representam, respectivamente, o critério *benefício* e *custo.*

Passo 2: Cálculo das distâncias Euclideanas entre A_i e A^+ (benefícios=) e entre A_i e A^- (custos) da seguinte forma:

$d^+ = [\sum_{j=1}^{n} W_j (p_j^+ - p_{ij})^2]$; $i \in \{1, 2, ... , m\}$

$d^- = [\sum_{j=1}^{n} W_j (p_j^- - p_{ij})^2]$; $i \in \{1, 2, ... , m\}$

Passo 3: Cálculo da proximidade relativa ξ_i para cada alternativa A_i em relação à solução ideal positiva A^+, conforme:

$\xi_i = d_i^- / (d_i^+ + d_i^-)$

Capítulo 10

MACBETH – Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Techinique.

Uma peculiaridade constante em qualquer metodologia é a passagem de uma escala semântica para uma escala cardinal, na qual se possam mensurar os critérios em uma mesma base. O M-MACBETH (**M**easuring **A**ttractiveness by a **C**ategorical **B**ased **E**valuation **T**echnique, um método elaborado por BANA e COSTA e VANSNICK, é, segundo seus autores:

um modelo para resolver o problema de construção de uma função de valor cardinal. Há outras técnicas para construção de uma função de valor cardinal, como as técnicas de direct rating e da "bissecção", que embora ainda muito utilizadas, recebem críticas ao seu processo. (BANA e COSTA; VANSNICK, 6) Segundo Bana e Costa (5) um critério cardinal é "um critério para o qual a comparação de diferença de valores, ou mais genericamente, intervalos, é significativa".

A proposta M-MACBETH vem melhorar a modelação cardinal de preferências, facilitando a elaboração dos juízos absolutos de diferença de atratividade entre duas ações.

O processo de interação utilizado na abordagem M-MACBETH propõe que se exprimam juízos absolutos de diferença de atratividade em sete dimensões, conforme Bana e Costa:

1. Diferença de atratividade nula (indiferença) (categoria 0);
2. Diferença de atratividade muito fraca (categoria 1);
3. Diferença de atratividade fraca (categoria 2);
4. Diferença de atratividade moderada (categoria;a 3)
5. Diferença de atratividade forte (categoria 4);
6. Diferença de atratividade muito forte (categoria 5);
7. Diferença de atratividade extrema (categoria 6) (ANTUNES, 2).

As respostas às questões são representadas numa matriz. O software MACBETH gera, então, os níveis de referência e coeficientes de ponderação para cada ação.

De acordo Oscar Netto (36) o método *Electre* (da sigla em francês para Tradução da Realidade por Eliminação e Escolha) deve ser utilizado em situações onde nem todas as alternativas são comparáveis entre si devido a consideráveis diferenças e pontos de vista. Para isso, o método *Electre-I* utiliza os conceitos fundamentais de "concordância", "discordância" e a definição de seus valores limites aceitáveis. Sua evolução mantém a mesma lógica de funcionamento que se baseia em se estabelecer ordenações preferenciais das alternativas: uma ascendente, uma descendente, e uma ordenação final formada a partir das anteriores.

Já o método *Compromise Programming* (ou da Programação de Compromisso), na visão de Oscar Netto (26), deve ser utilizado quando se busca identificar a solução mais próxima de uma ideal, portanto não-viável, utilizando-se um determinado padrão de distâncias.

O método *AHP* (*Analytic Hierarchy Process*) é discreto, hierarquizado e consiste em obter um sistema de pesos que resulte consistente com as preferências subjetivas mostradas pelo decisor e reconhecidas na matriz de comparação paritária, segundo Romero (33). Para Gomes (16) o método *AHP* é provavelmente o método multicritério mais amplamente usado no apoio à tomada de decisão e na resolução de conflitos negociados, em problemas com múltiplos critérios; conforme Romero (33) este tem se mostrado eficiente em situações complexas de grande porte.

Ainda segundo Romero (33), o método *Promethee - Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation* - permite obter uma ordenação total ou parcial das alternativas não dominadas.

O M-MACBETH é uma ferramenta simples, de fácil entendimento, possui parâmetros de fácil interpretação, além de ser humanista, interativo e construtivista, conforme seus autores Bana e Costa e Vansnick (6).

Capítulo 11
AHP – Analytic Hierarquy Process
MAH - Método de Análise Hierárquica
Processo de Análise Hierárquica ou Método de Análise Hierárquica

11.1 – Introdução

Os métodos de decisão associam números às alternativas, considerando-se cada critério. Esses números frequentemente têm significado apenas ordinal. Mas, segundo Thomas Saaty, a ponderação e adição de valores ordinais não faz sentido, pois diferentes números que preservem a mesma ordem podem gerar resultados diferentes. Por outro lado, para que esses números representem grandezas cardinais, é necessário que as medições sejam realizadas com o uso de escalas.

Segundo Saaty, a análise multicritério deveria ser uma ciência de medição baseada em matemática, psicologia e filosofia. Inspirado por essas ideias, ele desenvolveu em 1977 o método de tomada de decisão ao Processo de Análise Hierárquica — ou Analytic Hierarchy Process (AHP), que se baseia em comparações entre cada alternativa de *A* e cada uma das demais, utilizando uma escala de medidas capaz de refletir o grau da preferência do decisor por uma das duas alternativas. Em um primeiro momento são realizadas as comparações segundo cada critério. Depois, esses resultados são agregados a fim de se obter uma única ordenação das alternativas.

No dizer de Saaty: “A teoria reflete o que parece ser um método natural de funcionamento da mente humana. Ao defrontar-se com um grande número de elementos controláveis ou não, que abrangem uma situação complexa, ele os agrega a grupos, segundo propriedades comuns. Nosso modelo dessa situação cerebral permite uma repetição desse processo, no que consideramos esses grupos, ou melhor, suas propriedades comuns de identificação, como os elementos de um novo nível no sistema. Esses elementos, por sua vez, podem ser agrupados segundo um outro conjunto de propriedades, gerando os elementos de um outro nível “mais elevado”, até atingirmos um único elemento “máximo” que muitas vezes pode ser identificado como objetivo do nosso processo decisório.

O que acabamos de descrever é em geral denominado de hierarquia, isto é, um sistema de níveis estratificados, cada uma consistindo em tantos elementos ou fatores. A questão central, em termos dessa hierarquia, é a seguinte: com que peso os fatores individuais do nível mais baixo da hierarquia influenciam seu fator máximo, o objetivo geral? Desde que essa influência não seja uniforme em relação aos fatores, chegamos à identificação da sua intensidade ou, como preferimos, às sua prioridades.

Essa determinação das prioridades dos fatores mais baixos com relação ao objetivo pode reduzir-se a uma sequência de problemas de prioridade, um para cada nível, e cada um desses problemas de prioridade a uma sequência de comparações por pares. Essas comparações continuam a ser o ingrediente central da nossa teoria, mesmo que o problema original se complique por relações de feedback entre vários níveis ou fatores.

Voltemos à nossa sugestão, de que a nossa teoria é um modelo da maneira pela qual a mente humana conceitualiza e estrutura um problema complicado. Fomos influenciados pelas seguintes observações:

(1) Quando observamos as pessoas que participam de um processo de estruturação e priorização de uma hierarquia, vemos que elas se empenham naturalmente em sucessivos agrupamentos de elementos dentro dos níveis e na distinção entre níveis de complexidade.
(2) Os indivíduos informados sobre um determinado problema podem estruturá-lo hierarquicamente de maneira um tanto diferente, mas se seus julgamentos forem semelhantes, suas respostas gerais deverão ser semelhantes. Além disso, o processo é robusto. Em outras palavras, distinções sutis em uma hierarquia na prática não se tornam decisivas.
(3) No curso do desenvolvimento de nossa teoria, encontramos uma forma matematicamente racional de lidar com os julgamentos.
    Os participantes achavam que o processo capta a sua compreensão intuitiva de um problema. Além disso, os limites psicológicos parecem estar em consonância com as condições para a estabilidade matemática dos resultados”.
    “Mostramos que o velho ditado segundo o qual não podemos comparar laranjas com maças é falso. Uma laranja e uma maçã possuem muitas características comuns: tamanho, forma, gosto, aroma, cor, sementes, sumo e outras. Podemos preferir uma laranja por certas características, e uma maçã por outras. Além disso, a intensidade de nossa preferência por essas características pode variar. Podemos ser indiferentes ao tamanho e à cor, mas ter uma forte preferência pelo sabor, o que mais uma vez pode variar conforme a hora do dia. Temos uma tese segundo a qual esse tipo de comparação complicada ocorre na vida real a todo instante, sendo necessário um tipo de abordagem matemática”.

Alguns autores consideram o método AHP como um método da Escola Americana, justificando que ele pode ser aproximado por uma função utilidade ou que ele auxilia a construção da função utilidade. Outros consideram-no uma abordagem independente da Escola Americana ou da Escola Francesa, em virtude das suas características muito particulares. O AHP é um método muito conhecido na atualidade e tem sido amplamente estudado e divulgado em um grande número de publicações, como nos conhecidos jornais Management Science e European Journal of Operational Research. “As abrangências da classificação hierárquica são claras. É o método mais poderoso de classificação usado pela mente humana em coordenar experiências, observações, entidades e informações. Embora ainda não definitivamente estabelecida como tal para a neurofisiologia e psicologia, a classificação hierárquica representa provavelmente o modo básico de coordenação ou organização do processo cerebral de suas correlações mentais da expressão destes elementos em simbolismo e linguagem. O uso da ordenação hierárquica tem de ser tão antigo quanto o pensamento humano consciente e inconsciente ...” (Whyte, 1969).

“A vantagem básica da hierarquia é que podemos procurar o entendimento de seus níveis mais altos a partir das interações entre os vários níveis da hierarquia, em vez de diretamente entre os elementos dos níveis. Métodos rigorosos para estruturar os sistemas em hierarquia estão emergindo gradualmente nas ciências naturais e sociais e em particular, na teoria geral dos sistemas, à medida que ele se relaciona com o planejamento e projeto de sistemas sociais” (Saaty, 1977).

VANTAGENS DAS HIERARQUIAS

- A representação hierárquica de um sistema é usada para descrever como as mudanças em prioridades nos níveis mais altos afetam a prioridade dos níveis mais baixos.
- As hierarquias fornecem detalhes de informação sobre a estrutura e as funções de um sistema nos níveis mais baixos e uma visão geral de atores e de seus propósitos nos níveis mais altos. Limitações nos elementos de um nível são representadas melhor no nível mais alto seguinte para garantir que eles sejam satisfeitos. Por exemplo, a natureza pode ser considerada como um ator cujos objetivos são o uso de certos materiais sujeitos a determinadas leis e limitações.
- Os sistemas naturais montados hierarquicamente, isto é, através de construções modular e montagem final de módulos, desenvolvem-se muito mais eficientemente do que aqueles montados de um modo geral.
- Eles são estáveis e flexíveis: estáveis porque pequenas modificações tem efeitos pequenos; e flexíveis porque adições a uma hierarquia bem estruturada não perturbam o desempenho.

11.2 - Matriz de Comparações das Alternativas

Uma forma simples de se comparar as propriedades de duas alternativas, segundo um dado critério, é através da razão (quociente) entre os valores de suas respectivas propriedades. Por exemplo, dado um conjunto de pessoas, as alturas dessas pessoas podem ser comparados, adotando-se a menor altura como unidade de referência e medindo-se os demais a partir de múltiplos desta unidade.
Seja a pessoa de menor estatura de altura k_1, se k_2 é o dobro de k_1, então k_1 é a metade de k_2.

A escala utilizada pelo AHP para medir o nível de preferência do decisor, ao comparar duas alternativas, segue essas regras. Para cada critério c_i, é associado um valor $p_i(a, b)$ a cada par ordenado de alternativas, $(a, b) \in A$. Esse valor representa a

intensidade da preferência do decisor pela alternativa *a* em relação a *b,* de maneira que:
• se *a é* preferida à *b*, então $p_i(a, b) > 1$;
• se *a é* indiferente à *b*, então $p_i(a, b) = 1$;
• $\forall a, b \in A$, $p_i(a, b) = 1 / p_i(b, a)$.

Para definir o valor de $p_i(a, b)$, quantificando a intensidade da preferência do decisor, são utilizadas escalas que associam uma função entre os números positivos $\in \{1, 2, ... , 9\}$ e cada par ordenado (a, b).

Ao propor uma escala, Saaty considerou certas limitações humanas. Os limites inferior e superior de sua escala são 1 e 9, pois experimentos psicológicos mostram que o ser humano não é capaz de comparar simultaneamente um número muito grande de objetos. Embora vários experimentos tenham comprovado a eficácia dessa escala, a literatura propõe várias outras que podem ser usadas em diferentes problemas.

A escala utilizada por Saaty é:

- 1 - As duas alternativas têm a mesma importância;
- 3 - A experiência e o julgamento do decisor é ligeiramente favorável a uma alternativa;
- 5 – A experiência e o julgamento do decisor é fortemente favorável a uma alternativa;
- 7 - É demonstrado na prática que uma alternativa e muito mais importante do que a outra;
- 9 - Uma alternativa é extremamente mais importante do que a outra;
- 2, 4, 6, 8 - Valores usados para quantificar julgamentos intermediários a esses.

A forma mais utilizada para representar as comparações entre alternativas é por uma matriz quadrada *M*, cuja dimensão é igual ao número *n* de alternativas em *A*:

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & .... & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & .... & m_{2n} \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ M_{n1} & m_{n2} & .... & m_{nn} \end{vmatrix}$$

Onde $m_{ij} = p(a_i, a_j)$, e a_i, a_j são duas alternativas quaisquer em *A*.
A matriz *M é recíproca,* pois é sempre verdade que $m_{ij} = 1 / m_{ji}$, bem como $m_{ii} = 1$, $\forall$ i $\in \{1, 2, ... , n\}$. Além disso, se $m_{ij} = m_{ik}\, m_{kj}$, $\forall i, j \in \{1, 2, . . . , n\}$, ela é considerada, também, *consistente*. Este conceito de consistência está relacionado à noção de transitividade que incorpora as informações cardinais embutidas nos julgamentos do decisor. Para que um julgamento seja considerado transitivo ele deve atender à seguinte regra: dadas as alternativas a_i, a_j e a_k, $p(a_i, a_k) = p(a_i, a_j).p(a_j, a_k)$.
Na prática, frequentemente são geradas matrizes inconsistentes devido a julgamentos intransitivos ou por uma limitação da própria escala proposta por Saaty.

11.3 - Formulação baseada no Autovetor
A seguir um exemplo em que são comparadas as alturas de várias pessoas, preenchendo a matriz *M* a partir das relações entre a altura k_i de cada pessoa, $\forall$ i $\in \{1, 2, ... , n\}$. Sendo *n* o número total de pessoas, é possível obter a seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} k_1/k_1 & k_1/k_2 & \dots & k1/kn \\ k_2/k_1 & k_2/k_2 & \dots & k_2/k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n/k_1 & k_n/k_2 & \dots & k_n/k_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ . \\ . \\ k_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ n \\ . \\ k_n \end{vmatrix}$$

Nesse exemplo, as entradas da matriz M, e as alturas das pessoas já são conhecidas. Ao colocar suas preferências, o decisor ainda não conhece o peso (prioridade) k_i de cada alternativa na decisão final e as relações k_i / k_j são definidas pelo decisor de acordo com alguma escala. Determinamos a prioridade de cada alternativa, conforme cada critério, resolvendo o sistema.

Dada uma matriz qualquer $B_{n \times n}$, os *autovalores* e os *autovetores* de B são, respectivamente, os escalares λ e os vetores não nulos $x_{n \times 1}$, tais que $Bx = \lambda x$.
Se a matriz B *é* consistente, seu principal autovalor $\lambda max = n$ e seu principal autovetor é dado por qualquer coluna de B. Por outro lado, se B *não é* consistente, então $\lambda max \geq n$ e seu principal autovetor é dado pela equação:

$k_i = \lim (m_{ij}^{(L)}) \div (\sum_{h=1}^{n} m_{ij}^{(L)})$; $\forall$ i, j $\in$ {1, 2, ... , n} (***)

$m_{ij}^{(L)}$ corresponde à entrada m_{ij} da matriz M elevada à potência L.

Saaty recomenda que o problema do autovalor seja resolvido elevando-se a matriz M a uma potência suficientemente elevada e somando-se as linhas a fim de se normalizar o autovetor k. Esse processo é interrompido quando a diferença entre a i-ésima potência e a (i+1)-ésima potência é inferior a um valor pré-definido $\varepsilon > 0$.

No exemplo a seguir, suponha que a matriz inconsistente M tenha sido gerada pelo decisor a partir das comparações de três alternativas hipotéticas. Como se pode ver, elevando-se M *à*s potências $L = 14$ e $L = 15$, as colunas já normalizadas de M_{14} e M_{15} convergem para um mesmo vetor (o autovetor): $(0{,}210 \quad 0{,}404 \quad 0{,}386)^T$.

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1/7 \\ ½ & 1 & 4 \\ 7 & 1/4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M^{14} = \begin{vmatrix} 0{,}2110 & 0{,}2116 & 0{,}2099 \\ 0{,}4019 & 0{,}4038 & 0{,}4043 \\ 0{,}3870 & 0{,}3846 & 0{,}3857 \end{vmatrix}$$

$$M^{15} = \begin{vmatrix} 0{,}2102 & 0{,}2111 & 0{,}2113 \\ 0{,}4038 & 0{,}4024 & 0{,}4038 \\ 0{,}3859 & 0{,}3865 & 0{,}3849 \end{vmatrix}$$

11.4 - Índice de Consistência

O método AHP admite que as matrizes de comparações não sejam perfeitamente consistentes e, portanto, não exige que o decisor realize julgamentos transitivos. Entretanto, para avaliar a consistência dos julgamentos do decisor, Saaty criou um í*ndice de consistência* (*IC*), proporcional à diferença entre o principal auto-valor λ_{max} da matriz M e do valor que teoricamente ele teria caso a matriz fosse consistente $\lambda_{max} = n$: $IC = (\lambda_{max} - n) \div (n-1)$.

Segundo Saaty, se $IC > 0, 1$, é aconselhável reavaliar a matriz M, pois seus julgamentos podem estar tendendo a julgamentos aleatórios.

11.5 - Composição Hieráquica

Considere um conjunto finito *C* de critérios independentes entre si e um conjunto finito *A* de alternativas que tenham sido avaliadas segundo cada um dos critérios pertencentes a *C*, a partir de *m* matrizes *M* de comparações entre as alternativas (uma matriz *M* para cada critério). A prioridade da j-ésima alternativa k_{ji} em relação a cada critério c_i, $i = 1, 2, ..., m$ *é* dada pelo produto $w_i k_{ji}$, sendo w_i a prioridade do i-ésimo critério. Mas, quando se considera a prioridade da j-ésima alternativa levando-se em conta todo o conjunto *C*, esta deve ser calculada pelo somatório: $\sum_{i=1}^{m} W_i k_{ji}$. No AHP, esse mesmo princípio é generalizado para uma hierarquia de critérios, definida de tal modo que: o primeiro nível da hierarquia contém o objetivo geral do decisor; este vai se abrindo em critérios de decisão cada vez mais específicos, à medida que se desce para os níveis inferiores; no nível mais inferior da hierarquia estão as alternativas a serem comparadas, segundo todos os critérios do nível imediatamente superior a elas.

Tendo sido definida a estrutura hierárquica, o AHP adota o mesmo procedimento utilizado para as alternativas a fim de se descobrir a prioridade de cada critério. Assim, para cada critério é definida uma matriz M a partir das comparações dos seus “subcritérios”. Ou seja, dos critérios descendentes, que pertencem ao nível imediatamente inferior, na hierarquia. No exemplo que se refere ao problema esquematizado na figura 8, são necessárias ao todo dez matrizes M^i (i = 1, 2, ... ,10). A matriz M^1 é gerada a partir da comparação dos critérios do Nível 2 segundo o critério c_1. Nessas comparações, procura-se a resposta para a questão “qual o peso de cada um dos critérios 2, 3 e 4 para a escolha da opção 1, 2, ... , n”. A matriz M^2 é gerada a partir da comparação dos critérios c_5 e c_6 do Nível 3, segundo o critério c_2. Agora, a seguinte questão deve ser respondida: levando-se em conta o critério c_2, qual é a importância do critério c_2 no critério c_5 e c_6? De maneira análoga, a matriz M^3 é gerada pela comparação de c_7 e c_8, segundo o critério c_3, e assim por diante, até as matrizes M^5 - M^{10}, que são geradas pela comparação das alternativas, conforme cada um dos seis critérios $c_5 - c_{10}$ do Nível 3. Tendo-se obtido, por meio dessas 10 matrizes, o valor dos pesos $w_i > 0$ ($i = 1, 2, ..., m$) de todos os critérios da hierarquia e os pesos k_{ji} de todas as alternativas segundo os critérios $i = 5, 6, 7, ..., 10$, a forma mais simples de se compor a prioridade global K_j da j-ésima alternativa é multiplicando sua prioridade k_{ji}, computada para um dado critéerio c_i do Nível 3, pela prioridade deste critério em questão, pela prioridade do critério do Nível 2 do qual ele descende e assim por diante até chegar ao Nível 1.

Nível 1 critério c_1

Nível 2 Critério c_2 Critério c_3 Critério c_4

Nível 3 Critério *c5* Critério *c6* Critério *c7* Critério *c8* Critério *c9* Critério *c10*

Nível 4 Opção 1 Opção 2 .... Opção n **Figura 7**

Tendo feito isso para todos os critérios do Nível 3, todos esses valores devem ser somados. Assim, neste exemplo, a prioridade global K_j da j-ésima alternativa pode ser calculada por:

$K_j = (k_{j5}w_5 + k_{j6}w_6)w_2w_1 + (k_{j7}w_7 + k_{j8}w_8)w_3w_1 + (k_{j9}w_9 + k_{j10}w_{10})w_4w_1$, sendo k_{j1}, k_{j2}, ..., k_{j6} a prioridade da alternativa em questão segundo cada um dos seis critérios do Nível 3 e w_i o peso de cada critério c_i.

Capítulo 12

EXEMPLO PRÁTICO - APLICAÇÃO UTILIZANDO O MAH NA DETERMINAÇÃO DOS VALORES DOS FATORESE DA MATRIZ HOMOGENEIZADA NA AVALIAÇÃO DE IMÓVEL.

Vamos mostrar uma forma de tratamento, utilizando o Método de Análise Hierárquica (MAH), de variáveis que podem assumir uma série de valores, comparando-os uma a uma de forma a contemplar todas as possibilidades. Com uma diferença fundamental ao método clássico que compara um determinado imóvel da amostra com o imóvel avaliando. No MAH as comparações são feitas aos pares entre todas as variáveis constantes da amostra e com o imóvel avaliando. Além disso, também os fatores são comparados entre si, segundo os seus graus de importância relativa, em tese os fatores não têm igual importância, conforme sempre ocorre no método clássico.

Objetivo

Fatores

Imóveis

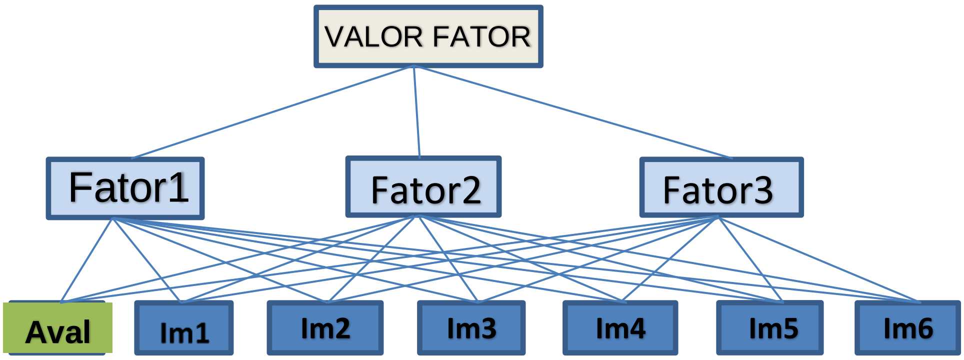


Figura 8

Aval representa o imóvel avaliando e Im1, ... , Im6 as amostras obtidas no mercado. Formaremos 3 matrizes 7x7 dos imóveis, uma para cada fator, e 1 matriz 3x3 dos fatores, com as respectivas notas dadas pelo julgador.

Fator1	Aval	Im1	Im2	Im3	Im4	Im5	Im6
Aval	1	3	3	2	1/2	2	3
Im1	1/3	1	3	3	1/5	1/2	1
Im2	1/3	1/3	1	1	1/5	1	1
Im3	1/2	1/3	1	1	1/4	1	1
Im4	2	5	5	4	1	4	5
Im5	1/2	2	1	1	1/4	1	1
Im6	1/3	1	1	1	1/5	1	1

Fator2	Aval	Im1	Im2	Im3	Im4	Im5	Im6
Aval	1	1/3	2	1/2	1/3	1	1
Im1	3	1	5	2	1	3	3
Im2	1/2	1/5	1	1/4	1/6	1/2	1/2
Im3	2	1/2	4	1	1	2	2
Im4	3	1	6	1	1	3	3
Im5	1	1/3	2	1/2	1/3	1	1
Im6	1	1/3	2	1/2	1/3	1	1

Por exemplo, o elemento da 1ª linha e 2ª coluna da matriz Fator1 – elemento a_{12} – é 3, o que significa que o imóvel avaliando é “ligeiramente superior” ao imóvel1, em relação ao Fator1.

Por exemplo, o elemento da 3ª linha e 5ª coluna da matriz Fator2 – elemento a_{35} – é 1/6, o que significa que o imóvel4 é mais do que “fortemente superior” ao imóvel2, em relação ao Fator2. Observe que a nota atribuída do imóvel2 para o imóvel4 é 1/6, em relação ao Fator2. Reciprocamente, o peso atribuído do imóvel4 para o imóvel2 é 6 – elemento a_{53} - em relação ao Fator2.

Por exemplo, o elemento da 4ª linha e 6ª coluna da matriz Fator2 – elemento a_{46} – é 2, o que significa que o imóvel3 é "pouco menos do que ligeiramente superior" ao imóvel5, em relação ao Fator2. Reciprocamente, o peso atribuído do imóvel 5 para o imóvel 3 é ½, em relação ao Fator2.

Autovetor da Matriz
Fator1 normalizado
0,2042
0,0806
0,0681
0,0785
0,3927
0,0972
0,0785

Autovetor da Matriz
Fator2 normalizado
0,0878
0,2729
0,0459
0,1756
0,2423
0,0878
0,0878

Matriz Fator1:
λ_{max} = 7,4156; IC = 0,0693; RC = 0,0525

Matriz Fator2:
λ_{max} = 7,0382; IC = 0,0064; RC = 0,0048

Observe que os índices de consistência e a razão de consistência, para as duas matrizes, foram satisfatórios. Se tal não ocorresse, teríamos que rever os pesos atribuídos aos elementos.

Fator3	Aval	Im1	Im2	Im3	Im4	Im5	Im6
Aval	1	1/3	1/5	2	1/3	3	1/2
Im1	3	1	1/5	7	1	5	2
Im2	5	5	1	7	2	7	3
Im3	1/2	1/7	1/7	1	1/5	1	1/3
Im4	3	1	1/2	5	1	5	1
Im5	1/3	1/5	1/7	1	1/5	1	1/4
Im6	2	1/2	1/3	3	1	4	1

Fatores	Fator1	Fator 2	Fator3
Fator1	1	1	1/2
Fator2	1	1	1/2
Fator3	2	2	1

Autovetor da Matriz
Fator3 normalizado
0,0701
0,1272
0,4128
0,0400
0,1814
0,0400
0,1286
λ_{max} = 7,4070; IC = 0,0678; RC = 0,0514

Autovetor da Matriz
Fatores normalizado
0,2500
0,2500
0,5000
λ_{max} = 3,0000; IC = 0; RC = 0

MATRIZ DOS AUTOVETORES DOS IMÓVEIS

	Fator1	Fator2	Fator3
Aval	0,2042	0,0878	0,0701
Im1	0,0806	0,2729	0,1272
Im2	0,0681	0,0459	0,4128
Im3	0,0785	0,1756	0,0400
Im4	0,3927	0,2423	0,1814
Im5	0,0972	0,0878	0,0400
Im6	0,0785	0,0878	0,1286

X

AUTOVETOR DA MATRIZ FATORES

Fator1	0,2500
Fator2	0,2500
Fator3	0,5000

=

MATRIZ PRODUTO

Aval	0,1081
Im1	0,1520
Im2	0,2349
Im3	0,0835
Im4	0,2495
Im5	0,0663
Im6	0,1059

Conforme determina a Norma de Avaliação:
Se o imóvel avaliando for superior ao da amostra, fator < 1;
Se o imóvel avaliando for igual ao da amostra, fator = 1;
Se o imóvel avaliando for inferior ao da amostra, fator > 1
Logo, temos em relação ao imóvel avaliando, como valores inversamente proporcionais, os fatores finais:

Im1	Im2	Im3	Im4	Im5	Im6
1,41	2,17	0,77	2,31	0,61	0,98

Assim, suponha que o valor do m^2 dos imóveis em Reais seja, respectivamente:
100 120 130 90 150 110
Multiplicando pelos fatores finais, temos como valores finais do m^2 dos imóveis:

Im1	Im2	Im3	Im4	Im5	Im6
R$ 141,00	R$ 260,40	R$ 100,10	R$ 207,90	R$ 91,50	R$ 107,80

A partir daí, com esses valores finais por m^2, na matriz homogeneizada calculamos o valor do m^2 do imóvel avaliando, de acordo com o recomendado pela Norma de Avaliação NBR 14653.

12.1 - OBSERVAÇÕES - COMENTÁRIOS

No exemplo numérico anterior colocamos 03 fatores, com o objetivo de mostrar a aplicação do MAH, entretanto podemos utilizar mais fatores, se necessário. Alguns fatores podem ser calculados diretamente por que são claramente determinados através de uma equação. Este é o caso, por exemplo, do “Fator Área”.

No exemplo aplicativo do MAH utilizamos 06 amostras, entretanto podemos utilizar qualquer número de amostras. O Método admite qualquer número de cenários e atores, neste caso, qualquer número de fatores e de imóveis.

Suponha, hipoteticamente, apenas para ilustrar, que os fatores utilizados foram: Fator1 = Localização; Fator2 = Padrão Construtivo; Fator3 = Posicionamento de Unidades Padronizadas. Quando, por exemplo, comparamos o Fator2 com o Fator3 e atribuímos um peso igual a 1/2, estamos dizendo que o Fator3 é “menos que ligeiramente” mais influente que o Fator 2, para a determinação do valor do imóvel avaliando. Ou seja, que o Posicionamento de Unidades Padronizadas influi “menos que ligeiramente” mais do que o o Padrão Construtivo, para determinar o valor do imóvel avaliando. O conceito “menos que ligeiramente” (2) significa que está muito pouco acima da “indiferença” (1) e um um pouco abaixo do “ligeiramente” (3).

Analogamente, na matriz Fator1, por exemplo, quando atribuímos o valor 5 da variável Im4 para a variável Im2, estamos dizendo que o Imóvel4 é “fortemente” superior ao Imóvel2, considerando o Fator1. Ou seja, se o Fator1 = Localização, o valor 5 da variável Im4 para a variável Im2, significa que em relação ao fator “Localização”, o Imóvel4 é “fortemente superior” ao Imóvel2. Em outras palavras, o Imóvel4 é “fortemente” mais bem localizado que o Imóvel2.

Observe que esses conceitos somente são possíveis na lógica Fuzzy ou nebulosa. Na Lógica clássica não há sentido falar que uma determinada variável é “menos que ligeiramente” maior do que outra ou que é “fortemente” superior a outra.

No MAH fazemos o cruzamento de todas as combinações possíveis, envolvendo todos os elementos constantes do problema. O autovetor representa a síntese dos pesos atribuídos. Testamos a coerência das informações, através do índice de consistência, caso não seja satisfatório, procedemos uma revisão para melhorarmos os pesos atribuídos, pois existe uma espécie de contradição.

A fundamentação científica do método utiliza conceitos matemáticos rigorosos e sofisticados, mas a aplicação é simples, bastando utilizar um software que calcule produto de matrizes. Devido as matrizes de peso utilizadas pelo Método serem recíprocas – matrizes recíprocas positivas - o cálculo do auto vetor é simples, basta elevar a matriz à potências elevadas, quando convergir teremos o autor vetor desejado. A convergência, para esse tipo de matriz especial, sempre ocorre. A matriz de avaliação $M = a_{ij}$ é formada da seguinte forma: a_{ij} são os elementos da matriz M, se $a_{ij} = k$; então $a_{ji} = 1/ k$; com $a_{ii} = 1$; $\forall$ i, j $\in$ {1, 2, ... , n}. Ou seja, os elementos simétricos em relação a diagonal principal da matriz M são recíprocos ou inversos. Esse tipo de matriz especial favorece a simplificação do método, inclusive o cálculo do autovetor.

Capítulo 13 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

No Método Direto de Dados do Mercado, de acordo com a NBR 14653 os fatores são analisados e comparados tomando como referência o imóvel avaliando, tendo todos o mesmo peso. A pergunta que se faz é qual o valor do fator i para o imóvel j, em relação ao imóvel avaliando. Essa pergunta é feita para cada fator i um número de vezes igual ao número de imóveis da amostra.

No Método MAH, o imóvel avaliando e os imóveis constantes da amostra são analisados e comparados entre si aos pares, em relação a cada um dos fatores, e estes possuem peso e são, também, comparados entre si. A pergunta que se faz é, em relação ao fator i, qual o valor de cada imóvel comparado com cada um dos demais, inclusive com o avaliando. Além disso, comparamos os fatores entre si atribuindo um peso relativo a cada um, permitindo que um determinado fator seja mais influente que o outro para a determinação do valor do imóvel avaliando. Ou seja, é feita a comparação aos pares esgotando-se todas as combinações possíveis. Por este Método podemos medir a coerência e consistência das informações e realizarmos uma realimentação do sistema se o Índice de Consistência não for satisfatório.

O julgador ou decisor, enfrenta um problema formado por um sistema complexo de componentes pertinentes ao problema que deseja resolver. É comum o tomador de decisões ser levado a atribuir um valor equivocado devido à dificuldade em manter a coerência e até mesmo a transitividade. Além deste fato, nas decisões tradicionais, o julgador é levado a ser determinístico e objetivo, entretanto os valores são, nitidamente, nebulosos, aproximados e subjetivos. Por outro lado, No MAH é medida a coerência dos julgamentos e dada a oportunidade de correção, caso esta não seja satisfatória.

O Modelo MAH sugerido é o que melhor se adapta à maneira pela qual a mente humana conceitualiza e estrutura um problema complicado ou sofisticado. As vezes o problema parece simples, quando na verdade não é. Vários indivíduos podem estruturar hierarquicamente um problema de forma diferente, entretanto se os seus julgamentos forem semelhantes e coerentes, suas respostas serão semelhantes. O MAH é um processo robusto, muito pouco sensível a pequenas mudanças, distinções não radicais em uma hierarquia não são decisivas.

No Modelo de Análise Hierárquica encontramos uma forma racional de lidar com julgamentos que são subjetivos, fazer todas as combinações de cruzamentos possíveis, medir o quanto estamos sendo coerentes e consistentes, tendo a oportunidade de realizarmos feedback para buscarmos resultados com coerência satisfatória. Podemos demonstrar matematicamente que o processo do MAH faz o julgador captar a compreensão intuitiva do problema. Os limites psicológicos parecem estar em consonância com as condições para a estabilidade matemática dos resultados.

A teoria do MAH favorece a incorporação de julgamentos de forma que as questões inerentes sejam articuladas, avaliadas e priorizadas. Os julgamentos são apurados através de um processo de realimentação, onde cada aplicação obriga a um refinamento dos julgamentos.

Na prática a tomada de decisão e o modelo têm que refletir a mensuração de todos os fatores que são importantes, qualitativamente e quantitativamente, sejam tangíveis ou intangíveis.

Referências Bibliográficas

[1] GUISARD FERRAZ, JOSÉ EUGÊNIO, A decisão do indivíduo à sociedade, Série especial, Rio de Janeiro, Embratel, 1984.

[2] FICHTE, J.G., El destino del sábio, Editorial Tor.

[3] SANTO AGOSTINHO, A cidade de Deus.

[4] FERREIRA, J. C. et al. Ensaio de Delimitação de Corredores Verdes na Área Metropolitana de Lisboa: Integração de dados fuzzy através da análise multi-critério. In: ENCONTRO DE UTILIZADORES DE INFORMAÇÃO GEOGRÁFICA, VIII., 2004. Oeiras. **Anais...** Oeiras - Portugal, 2004.

[5] V. Pareto, *Cours D'Economie Politique*, vol. I e II, F. Rougue, Lausanne, 1896.

[6] C. A. C. Coello, "Handling preferences in evolutionary multiobjective optimization: a survey", *Proc. of the 2000 Congress on Evolutionary Computation*, Piscataway, New Jersey, 2000, pp. 30-37.

[9] C. M. Fonseca, P. J. Fleming, "An Overview of Evolutionary Algorithms in Multiobjective Optimization", *Evolutionary Computation*, vol. 3 (1), pp. 1-16, 1995.

[10] D. A. V. Veldhuizen, G. B. Lamont, "Multi-objective Evolutionary Algorithms: Analysing the State-of-the-Art", *Evolutionary Computation*, vol. 8 (2), pp. 125-147, 2000.

[11] E. Zitzler, "Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Aplications", Ph.D thesis, Swiss Federal Institute of Tecnology (ETH), Zurich, Switzerland. TIK-Schriftenreihe Nr. 30, Diss ETH No. 13398, Shaker Verlag, Germany, ISBN 3-8265-6831-1.

[12] K. Deb, *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, John Wiley & Sons, New York, 2002.

[13] T. L. Saaty, “Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process”, *Management Science*, vol. 32, pp. 841 - 855, 1986.
[14] B. Roy, “Decision-aid and decision-making”, *European Journal of Operational Research*, vol. 45, pp. 324-331, 1990.
[15] B. Roy, P. Vincke, “Multicriteria analysis: Survey and new directions”, *European Journal of Operational Research*, vol. 8 (3), pp. 207-218, 1981.
[16] E. R. Lieberman, “Soviet Multi-objective Mathematical Programming Methods: An Overview”, *Management Science*, vol. 37, pp. 1147-1165, 1991.
[17] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.
[18] P. C. Fishburn, *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York, 1970.
[19] R. Keeney, H. Raiffa, *Decision with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade Offs*, John Wiley & Sons, New York, 1976.
[20] C.A. Bana e Costa, J.C. Vansnick, “Applications of the MACBETH approach in the framework of an additive aggregation model”, *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, vol. 6, pp. 107-114, 1997.
[21] V. Chankong, Y. Y. Haimes, *Multi-objective Decision Making: Theory and Methodology*, North-Holland, New York, 1983.
[22] S. M. Lee, *Goal programming for decision analysis*, Auerback, Philadelphia, 1972.
[23] W. Edwards, and F. H. Barron, “Smarts and Smarter: Improved Simple Methods for Multiattribute Utility Measurement”, *Organizational Behaviour and Human Decision Processes*, vol. 60, pp. 306-325, 1994.
[24] J. Mustajoki, R. P. Hamal ainem, A. Salo, “Decision Support by Interval Smart/Swing - Incorporating Imprecision in the Smart and Swing Methods”, *Decision Sciences*, vol. 36 (2), pp. 317-339, 2005.
[25] L. F. A. M. Gomes, M. C. G. Araya, C. Carignano, *Tomada de Decisões em Cenários Complexos*, Thomson Learning, Brasil, 2003.
[26] C. Zopounidis, M. Doumpos, “A multicriteria decision aid methodology for sorting decision problems: The case of financial distress”, *Computational Economics*, vol. 14 (3), pp. 197-218, 1999.
[27] G. Debreu, “Topological methods in Cardinal Utility Theory”, K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes (eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford University Press, pp. 16-26, 1960.
[28] B. Roy, “Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)”, *RIRO*, vol. 8, pp. 57-75, 1968.
[29] B. Roy, P. Bertier, “La méthode Electre II - Une application au médiaplaning”, M. Ross (ed.), *OR’72*, North-Holland Publishing Company, pp. 291-302, 1973.
[30] B. Roy, “Electre III: un algorithme de classements fonde sur representation floue des preferences en presence de criteres multiples”, *Cahiers du CERO*, vol. 20 (1), pp. 2-24, 1978.
[31] W. Yu, “Electre Tri: Aspects methodologiques et manuel d´utilisation”, Document du LAMSADE no 74, Universite Paris-Dauphine, 1992.
[32] M. Roubens, “Preference relations on actions and criteria in multicriteria decision making”, *European Journal of Operational Research*, vol. 10, pp. 51-55, 1982.
[33] J. P. Brans, Ph. Vincke, B. Mareschal, “How to select and how to rank projects: The Promethee method”, *European Journal of Operational Research*, vol. 24, pp. 228-238, 1986.

[34] C. L. Hwang, K. Yoon, *Multiple Attribute Decision Making – Methods and Applications: A State of the Art Survey*, Springer-Verlag, New York, USA, 1981.
[35] Ph. Vincke, “Analysis of multicriteria decision aid in Europe”, *European Journal of Operational Research*, vol. 25, pp. 160-168, 1986.
[36] R. F. Easley, J. S. Valacich, M. A. Venkataramanan, “Capturing group preferences in a multicriteria decision”, *European Journal of Operational Research*, vol. 125 (1), pp. 73-83, 2000.
[37] R.D. Luce, H. Raiffa, *Games and Decisions*, John Wiley & Sons, New York, 1957.
[38] H. A. Simon, *Administrative behaviour: a study of Decision Making Processes in Administrative Organizations*, Mac Millan, New York, 1947.
[39] K. J. Arrow, *Social choice and individual values*, J. Wiley, New York, 1951. 2nd edition, 1963.
[40] M. Allais, “Le comportement de l´homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l´ecole americaine”, *Econometrica*, vol. 21, pp. 503-46, 1953.
[41] A. Tversky, “Intransitivity of preferences”, *Psychological Review*, vol.76, pp. 31-48, 1969.
[42] A. Tversky, I. Simonson, “Context-dependent Preferences”, *Management Science*, vol. 39, pp. 1179-1189, 1993.
[43] B. Roy, M. Present, D. Silhoe, “A programming method for determining which Paris metro station should be renovated”, *European Journal of Operational Research*, vol. 24, pp. 318-334, 1986.
[44] N. Belacel, “Multicriteria assignment method PROAFTN: Methodology and medical applications”, vol. 125, pp. 175-183, 2000.
[45] Y. Siskos, E. Gregoroudis, C. Zopounedes, O. Saurais, “Measuring customer satisfaction using a survey based preference disaggregation model”, *Journal of Global Optimization*, vol. 12 (2), pp. 175-195, 1998.
[46] H. Barda, J. Dupuy, P. Lencione, “Multicriteria location of thermal power plants”, *European Journal of Operational Research*, vol. 45, pp. 332-346, 1990.
[47] P. Y. Ekel, E. A. Galperin, “Box-Triangular Multiobjective Linear Programs for Resource Allocation with Application to Load Management and Energy Market Problems”, *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 37, pp. 1-17, 2003.
[48] M. B. Carvalho, P. Y. Ekel, C. A. P. S. Martins, J. G. Pereira Jr, “Fuzzy set-based multiobjective allocation of resources: Solution algorithms and applications”, *Nonlinear Analysis*, vol. 63, pp. e715 - e724, 2005.
[49] M. Ozturk, A. Tsoukias, Ph. Vincke, “Preference Modelling”, em M. Ehrgott, S. Greco, J. Figueira (eds.), *State of the Art in Multiple Criteria Decision Analysis*, Kluwer Academic, Dordrecht, 2004.
Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 147-174, 2002.
[50] SAATY, T. L., Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process, Management Science, vol. 32, pp. 841 - 855, 1986.
[51] SAATY, T. L., Fundamentals of Decision Making and Priority Theory With the Analytic Hierarchy Process. Pittsburgh: RWS publications, 2006. 478 p.
[52] SAATY, T. L., How to Make a Decision: The Analytic Hierarchy Process, European Journal of Operational Research, vol. 48, pp. 9-26, 1990.
[53] SAATY, T. L., Método de Análise Hierárquica, McGraw-Hill Lyda e Makron Books do Brasil Editora Ltda, São Paulo, 1991.